2026학년도 논술고사 안내

이화여자대학교 입학처
TEL: (02)3277-7000
http://admission.ewha.ac.kr
E-mail: admission@ewha.ac.kr

목 차

2026학년도 논술고사의 방향과 준비

1. 논술고사의 목적

가. 고교과정에서의 학업성취도 평가

- ▸ 기초 교과지식 및 원리의 이해력과 적용 능력
- ▸ 다양한 교과내용에 대한 학습자 주도적 응용 능력

나. 대학에서의 수학 능력 평가

- ▸ 사고의 논리성·합리성, 논증 능력
- ▸ 학문적 발전가능성과 잠재력

다. 융복합적 사고력 및 의사소통 능력 평가

- ▸ 언어적 사고력과 영역 간 재구성·종합적 분석 능력
- ▸ 과정 중심적 이해력, 비판적 사고력과 표현력
- ▸ 수리적·논리적 사고력 및 종합적 분석 능력

2. 2026학년도 논술고사 실시전형과 시험방식

가. 논술고사 실시전형

전형	모집인원	전형요소 및 반영비율
수시모집 논술(논술전형)	297	논술 100%

※ 대학수학능력시험 최저학력기준 있음

나. 모집단위별 논술유형

<table>
<tr><th>논술유형</th><th colspan="2">모집단위</th><th>출제유형</th><th>시험시간</th><th>출제범위</th></tr>
<tr><td>인문Ⅰ</td><td>인문과학대학</td><td>국어국문학과, 중어중문학과,
불어불문학과, 독어독문학과, 사학과,
철학과, 기독교학과, 영어영문학부</td><td>언어논술Ⅰ</td><td rowspan="11">100분</td><td rowspan="4">고교 전 교육과정
(2015 개정 교육과정)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">인문Ⅱ</td><td>사회과학대학</td><td>정치외교학과, 행정학과, 경제학과,
문헌정보학과, 사회학과, 사회복지학과,
심리학과, 소비자학과, 커뮤니케이션·미디어학부</td><td rowspan="3">언어논술Ⅱ</td></tr>
<tr><td>경영대학</td><td>경영학부</td></tr>
<tr><td>신산업융합대학</td><td>의류산업학과, 국제사무학과</td></tr>
<tr><td rowspan="5">자연Ⅰ</td><td>자연과학대학</td><td>수학과, 통계학과, 물리학과,
화학·나노과학과, 생명과학과</td><td rowspan="5">수리논술Ⅰ</td><td rowspan="7">수학, 수학I, 수학II,
확률과 통계, 미적분,
기하를 포함한
고교 전 교육과정
(2015 개정 교육과정)</td></tr>
<tr><td>공과대학</td><td>전자전기공학전공, 지능형반도체공학전공,
식품생명공학과, 화공신소재공학과, 건축학과,
건축도시시스템공학과, 환경공학과,
기후에너지시스템공학과, 휴먼기계바이오공학과</td></tr>
<tr><td>인공지능대학</td><td>컴퓨터공학과, 사이버보안학과,
인공지능데이터사이언스학부</td></tr>
<tr><td>신산업융합대학</td><td>융합콘텐츠학과, 식품영양학과, 융합보건학과</td></tr>
<tr><td>간호대학</td><td>간호학부</td></tr>
<tr><td rowspan="2">자연Ⅱ</td><td>의과대학</td><td>의예과</td><td rowspan="2">수리논술Ⅱ</td></tr>
<tr><td>약학대학</td><td>약학전공</td></tr>
<tr><td colspan="6">※ 스크랜튼대학 스크랜튼학부(자유전공)는 인문Ⅰ, 인문Ⅱ, 자연Ⅰ 중에서 택1</td></tr>
</table>

3. 논술고사의 형식

문제구성	▸ 논술유형별로 구분하여 출제 - 인문Ⅰ은 영어지문이 제시되며 인문Ⅱ는 통계자료, 표 등을 활용하여 논리적 사고력을 측정하는 문항이 포함됨 - 자연Ⅰ, 자연Ⅱ는 수학 분야 제시문이 포함됨 ▸ 전 유형 모두 3개의 대문항이 제시되며 각 문항은 세부 문제들로 구성 - 언어논술은 다양한 주제의 여러 지문에 대한 종합적 논술형태로 일부 문항은 수리적 개념이 가미된 형태로 출제될 수 있음
제시문의 소재 및 범위	▸ 동서고금의 명작, 명문 뿐 아니라 통계·그림·사진 등의 자료 ▸ 일상생활·사회현상·자연과학 소재 속의 다양한 상황에 대한 설명 ▸ 사회현상과 자연현상에 관한 자료, 언어·사회·수학 등의 교과 내용 ▸ 수리논술 문항은 수학 교과과정에서 출제
문제유형	▸ 주어진 상황이 가지는 특징을 분석하여 표현하는 분석 논술형 ▸ 핵심개념, 문장, 지문내용(요지)에 대한 이해를 요구하는 설명 논술형 ▸ 제시된 주장의 반론 제시, 타당성 검토 등 비판 논술형 ▸ 주어진 자료나 지문의 논리적 연관성을 찾는 논리 진술형 ▸ 지문들을 근거로 하여 자신의 주장을 서술하는 종합 논술형

4. 논술고사의 평가기준

가. 주어진 상황과 제시문 내용에 대한 정확한 이해력

- ▸ 문제에서 제시하고 있는 상황에 대한 정확한 분석력
- ▸ 핵심적인 개념, 주장과 근거, 제시문에 대한 종합적 이해력
- ▸ 올바른 자료해석 능력 및 사고의 정확성과 통합성

나. 객관적·논리적 근거에 입각한 논증력

- ▸ 다양한 상황 및 관점을 객관적·논리적 근거에 입각한 서술 능력
- ▸ 주어진 조건과 관계없는 장황한 자기주장은 감점 요인

다. 제시문 주장에 대한 비판적 사고력

- ▸ 지문에 대한 정확한 이해를 바탕으로 한 비판 능력
- ▸ 지문(주장)들 상호 간의 관계에 대한 사고력
- ▸ 문항 자료의 정확한 분석을 통한 지문 주장에 대한 비판 능력
- ▸ 구체적 사례와 일반적 주장의 논리적 관계에 대한 사고 능력

라. 언어적 의사소통 능력 및 종합 능력

- ▸ 정확한 어법과 표현의 명료성 등
- ▸ 종합적 문제해결 능력과 일관성 있는 사고력과 논리력

5. 답안 작성 시 유의사항

가. 질문 요지의 정확한 파악

- ▸ 제시문과 질문의 요지에 대해 정확히 이해한 후 답변을 시작할 것
- ▸ 주관적 진술보다는 명확한 근거를 바탕으로 비판적 사고력 중심의 논술을 전개할 것

나. 간단명료하고 논리적인 답변 필요

- ▸ 주어진 제시문의 내용을 논거로 하여 간단, 명료하게 답변할 것
- ▸ 문제와 직접적인 관련성이 없는 자신의 상식을 중언부언하지 말 것
- ▸ 요구된 답안에 맞게 답안 길이를 조정할 것

다. 고교 수학 과정에서 터득한 관련 주제의 지식들을 종합한 새로운 관점 제시

- ▸ 제시문에 나온 주제들을 정확히 이해하고 이와 관련한 다양한 지식들을 활용할 것
- ▸ 제시된 주제와 관련한 다양한 지식들을 종합하여 새로운 관점을 제시하도록 노력할 것
- ▸ 새로운 관점의 제시가 지나친 비약이나 논리적 허구성에 빠지지 않도록 할 것

6. 논술고사의 준비

가. 장기적 준비

1) 교과내용에 대한 충분한 학습
   - ▸ 교과서 지문뿐 아니라, 고등학교 교과과정을 이수한 학생이라면 읽을 수 있는 유사한 내용의 다양한 제시문을 활용할 것
   - ▸ 시사적인 문제보다는, 교과서 중심의 보편적 주제를 중심으로 사고 능력을 배양할 것
2) 폭넓은 독서
   - ▸ 고전, 주변 사회·자연 현상 등에 관한 자료, 고교 교과내용 및 언론 보도문 등 다양한 종류의 글을 읽고 논리적·비판적으로 사고하는 습관
3) 단편적 지식보다는 기본 원리에 대한 이해
4) 해당 대학에서 요구하는 논술고사 경향에 대한 기초 지식 숙지
   - ▸ 기출문제, 출제의도 등 대학에서 공개한 내용을 미리 확인

나. 글쓰기 훈련

1) 주어진 제시문에 대한 이해력
   - ▸ 독창성 있는 글을 쓰기 이전에 제시문을 정확히 이해하는 능력이 선행되어야 함
   - ▸ 문제의 의도와 무관하게 미리 준비한 상투적 답안은 가능한 한 피해야 함
2) 통합적 사고 능력
   - ▸ 서로 다른 여러 개의 제시문들 간의 관련성을 파악하고 이를 종합하여 의견을 제시하는 연습이 필요함

3) 동일한 주제에 대해 반복해서 글을 써 보는 연습

▸ 하나의 주제에 대해 수차례 반복해서 글을 써 보는 연습이 필요함

▸ 글의 일부를 단순 교정하는 것이 아닌, 글 전체를 다시 쓰는 연습이 필요함

4) 여러 가지 관점에서 생각하고, 글을 써 보는 습관

▸ 자신의 관점과 다른 혹은 전혀 수용할 수 없는 관점에서도 글을 쓸 수 있어야 함

5) 글쓰기의 기본형식에 유의

▸ 철자법, 맞춤법 등을 틀리지 않는 것은 논술문 작성의 기본

6) 문제에서 요구하고 있는 것을 정확히 파악

▸ 선행지식이 아닌, 제시된 지문에 근거하여 논지를 전개하도록 함

▸ 자신의 관점이 아닌, 문제가 요구하는 관점이 무엇인지 파악해야 함

2026학년도 수시 모의논술고사
출제의도 및 우수답안 분석

I. 전반적인 출제 의도 및 특징

2026학년도 이화여자대학교의 모의논술고사는 고등학생들이 정규 교육과정을 통해 길러 온 다양한 역량과 지적 능력을 체계적이며 종합적으로 측정할 수 있는 문항을 출제하여 입학 전형의 요소로 활용하고자 하였다.

논술고사는 수험생들이 인간과 사회에 대해 가지고 있는 인식의 폭과 깊이를 확인할 수 있으며, 제시문의 내용을 정확히 이해하고 서로 다른 관점이나 견해를 비교할 수 있는 능력, 주어진 과제를 정확히 파악하고 해결하는 능력, 자신의 생각을 논리적으로 표현하고 소통하는 능력 등을 종합적으로 측정할 수 있는 평가 형태이다. 이화여자대학교 모의논술고사는 고등학교 교과서에 수록된 동서의 고전, 문학작품, 사회비평 등 여러 다양한 형태의 글들 가운데 선별한 제시문, 그리고 이 제시문들을 바탕으로 고등학교 교육과정이 목표로 하는 다양한 역량을 확인할 수 있는 문항들로 구성된다. 제시문은 고등학교 교육과정을 충실하게 이수한 학생들이 익숙하게 접해 온 내용들로 이루어져 있으며, 각 문항들은 수험생들의 능력들을 정확하게 파악할 수 있을 정도의 변별력을 가지되 고등학교 교육과정 수준을 넘어서지 않도록 적절한 난이도를 유지하고 있다.

이화여자대학교의 모의논술고사는 모든 제시문의 내용 범위와 수준을 고등학교 교육과정 내에 국한하며, 별도의 선행 지식이나 정규 교육과정 이외의 학습 없이도 답안을 작성할 수 있도록 문항을 개발함으로써 고교 교육 정상화에 일조하고자 하였다.

II. 문항의 구성

본교의 논술고사는 기본적으로 통합논술의 성격을 지닌다. 특정 주제와 관련하여 수험생들이 인문학적 이해 능력과 사회과학적 분석 능력을 갖추고 있는가를 측정하며, 이에 더하여 통합적 사고, 비교 및 대비 능력, 표현 능력 등을 갖추고 있는가를 살피는 데 목적을 두고 있다.

인문Ⅰ 모의논술고사는 인문학적 소양과 사고 능력을 제대로 갖추고 있는가를 묻는 3개 문항으로 구성되어 있으며, 이를 위해 1개의 영어 제시문을 포함하여 총 7개의 제시문이 활용되었다.

인문Ⅱ 모의논술고사는 논리적 추론 능력과 자료 해석 능력을 묻는 3개 문항으로 구성되어 있으며, 이를 위해 5개의 제시문과 2개의 소제시문이 활용되었다.

자연Ⅰ, 자연Ⅱ 모의논술고사는 방정식, 다항함수, 지수함수, 수열, 함수의 미분 및 정적분 등 고등학교 교육과정에서 다루는 기본적인 개념을 이해하고 이를 종합적으로 활용하여 해결할 수 있는 문제들로 구성되었다. 각 문제당 3~4개의 문항이 제시되어 문제 해결을 위한 착안, 기획, 수행에 이르게 하는 수리적 사고를 발전시켜 나가는 방식으로 출제되었다.

Ⅲ. 유형별 문항분석

1. 인문 I

■ 제시문 소개

제시문 [가]는 『2026학년도 수능특강 독서』에 수록된 글로서 철학자 블루멘베르크의 ‘절대적 은유’개념을 통해 은유와 신화에 대해 새로운 시각의 이해에 이르게 하는 글이다. ‘은유’의 종류, 필요성, 기능에 대한 설명을 통해 인간의 사고와 철학, 언어에 대한 심도 있는 사유를 선보이고 있으며, 은유에 대한 이해를 토대로 인간이 신화를 만들게 된 원인, 신화의 기능에 대해 설명하고 있는 점이 인상적이다.
(출처:『2026학년도 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2025, 60~61쪽)

제시문 [나]는 이규보의 「동명왕편(東明王篇) 병서(幷序)」에서 발췌하였다.『문학』(방민호 외, 미래엔, 2018, 159~166쪽),『문학』(한철우 외, 비상교육, 2018, 178~183쪽) 등 2종의 2015 고등학교『문학』교과서에서 다루고 있는 ‘주몽 신화’에 관한 글로서, 핵심 내용은 고구려 시조 동명왕의 신이한 출생과 영웅적 위업이 나라의 기원과 정통성을 표상하기에, 그 이야기를 반드시 남겨 후세에 전해야 한다는 것이다.
(출처: 민족문화추진회 편,『(국역) 동국이상국집』1, 민족문화추진회, 1980, 127~129쪽)

제시문 [다]는『2025학년도 수능특강 영어』에서 발췌하였다. 이 글은 인간과 컴퓨터 간의 상호작용을 보다 자연스럽게 만들기 위해 ‘컴퓨터 은유(metaphor)’가 효과적이라고 설명한다. 컴퓨터 은유는 사용자가 이미 익숙한 사물이나 활동을 기반으로 컴퓨터의 명령, 화면 구성, 동작 방식 등을 모방함으로써, 낯선 시스템을 직관적으로 이해하고 쉽게 사용할 수 있도록 돕는다는 것이다.
(출처 :『2025학년도 수능 연계교재 수능특강 영어영역』, EBS, 2024, 62쪽)

제시문 [라]는『2026학년도 수능특강 독서』에서 발췌한 글로서, 주자학의 ‘격물치지설’에 대한 조선 후기 철학자 최한기의 견해를 설명한 글이다. 자연에 대한 직접적인 관찰, 사물의 성질을 객관적으로 정확하게 아는 것에 초점을 맞춘 조선 후기 유교 철학의 한 흐름의 전개 과정과 의의를 담고 있다.
(출처:『2026학년도 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2025, 299쪽)

제시문 [마]는『2026학년도 수능특강 독서』에서 발췌하였다. 인간이 사물의 색을 인지하는 현상에 대한 여러 시각의 설명을 비교하여 제시한 내용으로 아리스토텔레스와 뉴턴, 그리고 괴테에 이르는 상이한 입장들을 비교하여 서술하고 있는데, 이 중 괴테는 색을 온전히 외부 사물의 성질이라고 이해하거나 빛의 특성이라고 이해한 종래의 견해들과 달리 인간의 내부와 자연이 연결되어 있음을 입증하는 사례들을 통해 색의 이해에 대한 심리적, 미학적 관점의 설명을 제시하였다는 점에 주목하고 있다.
(출처:『2026학년도 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2025, 281-282쪽)

제시문 [바]는 『2026학년도 수능특강 독서』에서 발췌하였다. 이 글은 푸코가 주장하는 유토피아와 헤테로토피아의 개념을 요약적으로 정리한다. 푸코는 헤테로토피아를 ‘현실에 실재하지만 이질적·비균질적인 공간’이며, ‘현실 전복의 공간’으로 기존 권력 구조에 대항하여, 새로운 질서를 모색하는 공간이자 새로운 예술적 가능성을 탐색하는 ‘바깥의 공간’이라고 말한다.

(출처: 『2026학년도 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2025, 253~254쪽)

제시문 [사]는 고등학교 문학 교과서에 수록된 김애란의 소설 「도도한 생활」의 일부이다. 이 작품은 2000년대를 살아가는 청년들의 궁핍하고 고단한 일상과 절망적인 삶을 섬세하게 그리고 있는데, 특히 비에 잠기는 ‘반지하’ 방에서 금기시된 ‘피아노 치기’를 하면서 이러한 일상을 전복하는 장면을 그려 내고 있다.

(출처: 『2015 개정 교육과정 고등학교 문학』, 동아출판, 256~265쪽)

[문항1] ⑴ 제시문 [가]를 활용하여, 제시문 [나]의 '동명왕의 일'에 대한 '㉠김부식'과 '㉡나'의 관점을 대비하시오. [20점]

■ 출제의도

이 문항에서는 은유의 철학적 의미를 설명한 제시문 [가]를 바탕으로, 제시문 [나]에서 '동명왕의 일'을 받아들이는 '김부식'과 '나'의 입장차를 대비할 수 있는지 평가하고자 하였다. '김부식'은 은유를 수사적 표현이나 불완전한 인식으로 보는 기존 철학의 입장과 맞닿아 있고, '나'는 신화를 개념으로는 해명할 수 없는 고유한 방식으로 이해한다는 점에서 절대적 은유의 관점에 부합한다. 두 인물의 태도를 대비토록 함으로써, 수험생이 글의 내용을 실제 맥락에 적용하고 관점 간의 차이를 논리적으로 구성할 수 있는지 가늠하고자 하였다.

■ 우수답안

제시문 [가]는 은유를 단순한 수사적 장식이나 불완전한 인식의 표현으로 간주해 온 기존 철학의 견해를 소개한 뒤, '절대적 은유'를 통해 은유의 중요성을 부각한다. 블루멘베르크는 절대적 은유를 개념으로 환원될 수 없는 고유한 형식이자, 세계의 총체성과 인간 실존의 의미를 드러내는 창조적 언어로 본다. 특히 신화는 공포와 혼돈의 세계에 구조와 의미를 부여함으로써 인간이 현실을 견디도록 돕는 이야기이며, 단순한 상징이 아니라 삶의 태도와 가치 체계를 담은 서사라고 설명하였다.

이러한 내용을 바탕으로 제시문 [나]에 나타난 '김부식'과 '나'의 태도를 비교할 수 있다. '김부식'은 '동명왕의 일'을 크게 기괴하며 허탄하다고 치부하여 역사서에서 생략하였다. 이는 은유를 불완전한 표현으로 보고, 개념적이고 명료한 언어만이 진리에 적합하다고 생각한 종래 철학의 입장에 닿아 있다. 인간의 사유가 발달하면 신화에 활용된 은유 역시 더 이상 필요하지 않게 된다고 보았던 것이다.

반면, '나'는 '동명왕의 일'을 시로 형상화함으로써 그 의미를 보존하려 한다. 그는 이 이야기가 나라의 성스러운 기원을 드러낸다고 여겨, 사실 여부보다는 서사에 담긴 정신과 질서 부여의 기능에 주목하였다. 신화를 단순한 허구가 아니라 나라의 정체성을 형성하는 매개로 인식하였다는 점에서, '나'의 태도는 '절대적 은유' 개념과 호응한다. 그는 시라는 형식을 통해 역사에 상상력을 불어넣고, 현실 너머의 진실을 성찰하는 공간을 마련하였던 것이다.

■ 우수답안 분석

이 문항에서는 먼저 제시문 [가]에서 은유에 대한 철학적 입장이 두 가지로 구분되어 제시된다는 점을 밝혀야 한다. 하나는 은유를 수사적 표현이나 불완전한 인식으로 보는 종래 철학의 입장이고, 다른 하나는 은유를 개념으로 환원할 수 없는 고유한 방식으로 이해하는 절대적 은유의 관점이다. 이어서 제시문 [나]의 '김부식'은 종래 철학의 입장에 해당하는 태도를 보였던 반면, '나'는 절대적 은유의 관점에 부합하는 이해를 드러내었다는 점을 설명해야 한다. 이 세 내용을 순차적으로 제시하는 것이 적절한 답안을 구성하는 핵심이다.

[문항1] ⑵ 제시문 [다]를 한국어로 요약하고, 제시문 [가]의 '절대적 은유'와 제시문 [다]의 'metaphor'를 비교하시오. [20점]

■ 출제의도

이 문항은 먼저 computer metaphor에 대한 영어 지문을 요약하게 함으로써, 영어 지문에서 핵심 정보를 추출하고 이를 간결하고 명확한 문장으로 재구성하는 능력을 평가한다. 이어서 제시문 [가]의 '절대적 은유' 개념과 [다]의 'metaphor'를 비교하도록 함으로써, 두 제시문에 나타난 은유의 기능을 비판적으로 분석하고 차이점을 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가하고자 한다.

■ 우수답안

제시문 [다]에서는 인간과 컴퓨터의 상호작용을 자연스럽고 효율적으로 만들기 위해 '컴퓨터 은유(computer metaphor)'를 활용해야 한다고 말한다. 인간에게 익숙한 사물이나 활동을 모방함으로써, 사용자가 별다른 학습 없이도 컴퓨터라는 새로운 시스템을 직관적으로 이해하여 학습 부담을 줄일 수 있다. 예를 들어, '데스크탑 은유'는 컴퓨터 화면을 책상처럼 구성해 폴더 작업을 현실처럼 느끼게 하고, '브라우저 은유'는 웹 탐색을 쇼윈도 쇼핑에 비유해 쉽게 이해하게 한다.

블루멘베르크는 제시문 [가]에서 은유를 단순한 수사적 장치나 개념 이전의 불완전한 표현으로만 간주한 기존의 관점을 비판하며, 개념으로 환원될 수 없는 고유한 표현 형식인 '절대적 은유'를 제시한다. 그는 절대적 은유가 개념적 사고의 토대가 되며, 세계의 본질이나 삶의 지향성과 같은 개념으로는 설명할 수 없는 궁극적 문제들을 사유하게 해 준다고 본다. 절대적 은유는 현실의 총체성을 이미지로 형상화하여 세계를 풍부하게 표현하고, 인간 실존과 세계에 대한 태도 및 행위 방식을 규정하는 기능을 한다. 반면, 제시문 [다]의 컴퓨터 은유는 일상적으로 익숙한 개념을 활용해 낯선 시스템을 쉽게 이해하고 사용할 수 있도록 도와주는 실용적 도구이다. 이 은유는 사용자 편의성과 효율성을 높이기 위한 수단으로, 철학적 깊이나 인간 존재에 대한 탐구보다는 기능적 목적에 초점을 둔다. 결국, [가]의 절대적 은유가 인간의 존재론적 이해를 위한 근본적인 사고의 틀이라면, [다]의 은유는 기술적 이해를 촉진하는 도구로서 기능적 차이를 지닌다.

■ 우수답안 분석

이 답안은 제시문 [가]와 [다]의 핵심 내용을 충실히 요약하고, 절대적 은유와 컴퓨터 은유의 기능 차이를 명확하게 제시하고 있다. 먼저 낯선 시스템을 직관적으로 이해하고 쉽게 사용할 수 있도록 돕는 컴퓨터 은유의 기능을 간결하게 잘 요약하고 있다. 이어서 제시문 [가]의 절대적 은유는 인간이 개념으로 포착할 수 없는 세계의 본질과 실존을 사유하게 하는 사고의 틀이지만, 제시문 [다]의 컴퓨터 은유는 낯선 기술 시스템을 익숙한 개념으로 쉽게 이해하게 돕는 실용적 도구라는 각기 다른 은유 개념의 본질적 차이를 잘 기술하고 있다.

■ 영어 제시문 한국어 번역

인간과 기계의 상호 작용을 더 자연스럽게 만드는 좋은 방법은 더 나은 은유를 개발하는 것일 것이다. 컴퓨터 은유란 컴퓨터가 그것의 명령어, 디스플레이 배열 및 동작을 통해 모방하는 친숙한 사물이나 행동이다. 오늘날 우리가 가진 두 가지 주요 은유는 데스크톱과 브라우저이다. 데스크톱 은유에서 디스플레이 화면은 일반적인 책상을 모방하는데, 정보는 폴더 안에 보관되며, 폴더를 여닫고 다른 폴더에 넣을 수 있다. 웹 브라우징에서 은유는 번화가 윈도쇼핑인데, 여러분은 다양한 '상점'을 응시하다가 마음에 드는 곳을 보고 (클릭하여) 들어간다. 그 안에는 탐색할 더 많은 선택 사항이 있고, 또 하나의 선택 사항을 선택한 다음 다시 들어간다. 좋은 컴퓨터 은유의 힘은 그것이 여러분이 모르는 새로운 시스템을 여러분이 친숙한 기존 '시스템'처럼 행동하게 만든다는 것이다. 여러분이 새로운 개념과 명령어를 배우느라 애쓸 필요가 없으므로 이것은 여러분이 새로운 시스템을 사용하여 그것으로부터 유용한 결과를 쉽게 얻을 수 있게 해 준다.

[문항2] 제시문 [마]의 괴테의 관점에서 제시문 [라]의 최한기의 견해를 비판하시오. [30점]

■ 출제의도

이 문항은 제시문의 핵심 내용을 이해하고 각 글이 대상을 대하는 관점을 파악한 후, 그 관점을 다른 대상이나 상황에 적용하는 능력을 측정한다. 제시문 [라]가 사물에 대한 객관적 인식을 중시하고 있다면, 제시문 [마]는 사물에 대한 인식이나 감각에 인간의 내면이 작용하는 점을 함께 살펴야 한다는 점을 강조하는 내용이다. 이 문항에 답하기 위해서는 두 제시문의 내용을 정확하게 이해하고, 사물과 세계를 인식하고 이해하는 과정에 대한 관점의 차이를 파악하여야 한다.

■ 우수답안

제시문 [마]에서 괴테는 인간의 내부와 자연이 분리 불가능하게 연결되어 있다고 보았다. 유도색과 피유도색 현상을 세밀히 살핌으로써 우리의 눈이 세계를 인식할 때 외부의 유도색에 대립되는 피유도색을 만들어 내는 능동적 작용을 한다는 것을 확인한 것이다. 또한 여러 가지 색에 각각의 상징적 의미나 미학적 의미를 부여하는 현상을 예로 들면서, 인간이 감각을 통해 외부 세계의 색채를 감지하는 현상을 심리적, 철학적, 미학적 관점에서 설명하였다.

반면, 제시문 [라]의 최한기는 우리의 인식 대상인 자연의 '이(理)'가 사물에 있다고 주장한다. 그는 인간의 마음을 아무런 색이 없는 '우물물'에 비유하며, 우리 마음에 선험적인 '이(理)'나 관념이 내재하지 않는다고 보았다. 마음속에 무엇이 있는가는 중요하지 않으며, 객관 세계의 이치를 정확하게 인식하기 위해 사물에 대해 객관적으로 탐구하는 것을 중시하였다.

괴테의 관점에서 볼 때 최한기의 자연 인식은 지나치게 외재적이고 객관적이라는 한계를 가진다. 자연을 있는 그대로 파악하는 것도 중요하지만, 그것을 받아들이는 인간의 내면 세계 또한 인식의 과정에 작용할 수 있음을 최한기는 충분히 살피지 못하고 있다. 세계의 이치를 탐구하는 과정에 무색의 우물물처럼 내면 세계의 작용이 전혀 없을 수는 없으며, 인간의 내면 세계와 자연이 감각을 통해 연결되어 있다는 사실을 간과해서는 제한적인 인식에만 이르게 될 가능성이 크다.

■ 우수답안 분석

이 문항에서는 인간이 사물이나 세계를 인식하는 과정에 대해 제시문 [라]와 제시문 [마]에 등장하는 인물들이 각각 어떠한 관점에서 그 과정을 이해하고 설명하였는지 각 관점의 차이를 정확하게 파악하여야 완성도 높은 답안을 작성할 수 있다. 예시 답안에서는 제시문 [라]와 제시문 [마]의 '인식'에 대한 관점의 차이를 정확히 파악하였다. 이어 문항에서 요구한 대로 상이한 두 관점 중 하나의 관점을 선택하여 다른 관점의 한계를 짚고 있으며, '심리적, 철학적, 미학적 관점'에서 '자연학'을 중시하는 관점이 가질 수 있는 한계, 즉 인간의 내면 세계의 작용을 간과할 수 있다는 점을 명확히 서술하고 있다.

[문항3] 제시문 [바]의 ‘헤테로토피아’ 개념을 활용하여, 제시문 [사]의 ‘반지하’ 방의 의미에 대해 서술하시오. [30점]

■ 출제의도

이 문항은 제시문 [바]에서 제시하는 ‘헤테로토피아’의 핵심 개념을 요약하고, 그 구체적 의미를 명확히 이해하는 능력을 통해, 제시문 [사]에 나타난 가난한 청년의 일상과 ‘반지하’ 방을 문학적으로 해석하는 능력을 요구한다. 특히, 인물이 보여주는 피아노를 치는 행위를 통해 이 공간이 현실 전복과 해방의 공간으로 변화하는 문학적 상상력을 이해하는 문항으로, 수험생의 사실적·추론적 독해력과 작품에 대한 비판적 감상 능력을 종합적으로 평가한다.

■ 우수답안

제시문 [바]에서 푸코가 말하는 헤테로토피아는 현실에 실재하지만 우리가 사는 현실과는 이질적인 공간으로, 기존의 권력 체계에서 벗어나 있고 그에 반하는 질서를 갖고 있는 ‘반공간’ 혹은 ‘바깥의 공간’을 의미한다. 현실에 대한 이의 제기를 수행하는 일종의 대항 공간, 현실 전복의 공간으로, 다른 사람들에게는 낯설고 위험한 곳처럼 보이기도 하지만 누군가에게는 위안을 주고 해방을 실현하는 공간이다. 푸코의 헤테로토피아 개념은 현대 예술가들이 현실에 대한 저항과 전복, 그리고 새로운 가능성을 탐색하는 상상력의 공간과 밀접하게 관련되기도 한다.

제시문 [사]의 ‘반지하’ 방은 위에서 말한 헤테로토피아에 해당한다. 반지하 방은 언니와 ‘나’의 삶의 터전이지만, 동시에 집주인이 ‘나’에게 피아노를 치지 못하게 억압하는 곳이며, 곰팡이가 피고, 폭우로 침수를 겪고, 언니의 전 남자친구까지 찾아오는 곳이기도 하다. 일상적인 공간인 동시에 금기, 불결, 재난의 위험이 상존하는 공간인 것이다.

방이 물에 잠기는 상황에서 ‘나’는 피아노를 쳐서 집주인이 설정한 금기를 위반하고, 평소 피아노를 치고 싶어 했던 자신의 욕망을 실현하며, ‘반지하’ 방이 침수가 되는 위험한 현실을 전복시킨다. 이제 ‘반지하’ 방은 피아노 소리가 공기 방울이 되어 톡톡 터지는 환상적인 공간이 되고, 방 안이 물에 잠기는 가운데 오히려 편안한 감정을 느끼게 하는 해방의 공간이 된다.

■ 우수답안 분석

이 답안에서는 가난한 청년의 주거 공간이 예술적 실천을 통해 억압에서 해방으로 전환되는 과정을 헤테로토피아의 관점에서 구체적이고 해석하고 있다.

제시문 [바]에서 푸코가 제시한 ‘헤테로토피아’ 개념을 명확히 요약하고 있고, 이를 바탕으로 제시문 [사]의 ‘반지하’ 방이 단순한 주거 공간이 아니라, 곰팡이와 침수, 집주인의 피아노 금지라는 억압과 금기, 그리고 전 남자친구의 방문 등 다양한 위험과 불확실성이 공존하는 이질적 공간임을 구체적으로 제시하고 있다. 침수라는 위기 상황에서 집주인의 금기를 어기고 피아노를 치는 행위를 통해, 억압당한 욕망을 실현하고 일상의 권력 구조를 전복하는 상징적 실천을 잘 보여 주고 있다. 또한 ‘반지하’ 방이 물에 잠기면서 오히려 환상적이고 해방적인 공간으로 변모하고, 인물이 편안함을 느끼는 심리적 변화까지 포착하여, 헤테로토피아의 개념이 문학적 상황에 어떻게 적용될 수 있는지를 설득력 있게 설명하였다.

2. 인문Ⅱ

■ 제시문 소개

제시문 [가]는『2024학년도 수능특강 독서』에서 발췌한 글이다. 공적 영역과 사적 영역의 구분에 관한 고대 그리스 페리클레스와 아리스토텔레스의 견해를 정리한 비교적 평이한 주장의 글이다. 특히 아리스토텔레스는 사적 영역인 가족과 대비되는 공적 영역 즉 폴리스의 특징을 잘 제시하고 있다.

(출처:『2024 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2023, 76~77쪽)

제시문 [나]는『2024학년도 수능특강 독서』에서 발췌하였다. 이 글은 근대 서양의 대표적 자유주의자들인 존 로크와 존 스튜어트 밀의 자유 개념을 요약적으로 정리한다. 이들은 개인의 자유는 타인의 간섭이 부재할 때 가능하다고 말한다. 로크는 원초적 자연 상태에서 모든 인간이 자유롭고 평등함을, 밀은 사적인 행위 주체인 개인이 자신의 몸과 정신에 대해 완전한 자유를 가지고 있음을 말한다.

(출처:『2024 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2023, 76~77쪽)

제시문 [다]는『2026학년도 수능특강 윤리와 사상』에서 발췌하였고, 원문인 비롤리의『공화주의』에서 보충 발췌하여 구성하였다. 이 글은 공화주의자 비롤리의 공화주의적 자유 개념을 요약적으로 정리한다. 공화주의가 주장하는 진정한 자유는 타인의 간섭을 받지 않는 것뿐만 아니라, 자의적 지배가 언제나 가능한 주종적 지배관계가 부재할 때 가능함을 제시문은 보여주고 있다.

(출처: 『2026학년도 수능 연계교재 수능특강 사회탐구영역 윤리와 사상』, EBS, 2025, 141쪽.
모리치오 비롤리,『공화주의』, 인간사랑, 2006, 92~93쪽)

제시문 [라]는「2024학년도 대학수학능력시험 국어」문항들 가운데 발췌하였으며, 일부 내용을 수정하였다. 이 글은 데이터 분석 과정에서 이상치가 회귀선에 미치는 영향을 설명하는 비교적 평이한 글이다. 최소제곱법을 통해 선형 회귀선을 구하고, 이상치가 잔차 제곱합에 영향을 미쳐 회귀선의 기울기와 절편이 달라지는 과정을 구체적인 사례와 함께 제시하고 있다.

(출처:「2024년도 대학수학능력시험 국어」, 한국교육과정평가원, 2023, 3쪽)

제시문 [마]는『2025학년도 수능특강 독서』에서 발췌하였으며, 일부 수정하였다. 이 글은 머신 러닝의 대표적 분류 기법인 서포트 벡터 머신(SVM)의 원리와 특징을 개요적으로 설명하고 있다. 특히 SVM이 최대 마진 기준으로 결정 경계를 설정하는 과정을 구체적인 사례와 함께 제시하며, 이상치 제거나 고차원 사상과 같은 실질적 응용 방안을 소개하고 있다.

(출처:『2025 수능 연계교재 수능특강 국어영역 독서』, EBS, 2024, 273쪽)

[문항1] ⑴ 제시문 [가]와 제시문 [나]에 나타난 '공적 영역'에 대한 관점을 대비하시오.[20점]

■ 출제의도

공적 영역에 대해, 제시문 [가]에서는 인간의 본성에 입각하여 공동선을 추구하는 장으로, 제시문 [나]에서는 자유주의의 입장에서 개인의 행복과 안전을 보장받기 위해 인위적으로 구성된 장으로 서로 상반된 관점이 제시되어 있다. 두 제시문의 논지를 이해하고 분석할 수 있는 능력과 함께, 특히 공적 영역의 개념적 차이를 논리적으로 대비해 낼 수 있는 능력을 측정하고자 하였다.

■ 우수답안

제시문 [가]에서 공적 영역은 인간적 가치가 실현되는 곳으로, 시민들이 공동선을 추구하면서 인간의 목적을 실현해 가는 본질적인 장이다. 동등한 사람들 사이의 자유의 장이면서, 인간의 본성에서 나온 자연적인 것으로 간주되는 폴리스가 여기에 해당된다. 이러한 공적 영역은 인간적 가치가 결여된 사적 영역, 즉 가장을 정점으로 하는 지배와 종속의 장이면서 단순히 먹고사는 것을 해결하기 위한 수단의 장인 가족과 대비되고 있다.

제시문 [나]에서는 소유적 개인주의를 핵심 내용으로 하는 자유주의의 입장에서, 공적 영역과 사적 영역을 구분하고 있다. 공적 영역은 자연권을 소유한 개인들이 자기 소유권과 자기 결정권을 행사하면서 자신의 행복과 안전을 추구하는 장인 사적 영역을 더 안전하게 보장받기 위해 인위적으로 구성된 장이다. 공적 영역은 개인들이 단지 사적 개인들이 원할 때만 그들의 동의를 통해 구성될 수 있는 것이며, 공적 영역의 기능은 개인들의 행복과 안전을 위한 것으로 제한된다.

제시문 [가]에서는 공적 영역이 인간의 본성에서 나온 자연적인 것으로 본 반면, 제시문 [나]에서 공적 영역이 인위적으로 구성된 장으로 보고 있다는 점에서 대비를 이루며, 제시문 [가]는 제시문 [나]에 비해 공적 영역을 우위에 두는 입장을 취하고 있다.

■ 우수답안 분석

이 답안에서는 먼저 제시문 [가]에서 시민들이 공동선을 추구하는 폴리스로 대표되는 공적 영역의 관점이 잘 정리되어 있다. 이와 대비하여 제시문 [나]에서는 자유주의 입장에서 개인들이 자신의 행복과 안전을 보장받기 위해 그들의 동의 하에 공적 영역이 구성될 수 있다는 점을 지적하고 있다. 마지막으로 자연성과 우위성에 대한 제시문 [가]와 제시문 [나]의 대비되는 특징이 일목요연하게 제시되어 있다.

[문항1] ⑵ 제시문 [나]와 제시문 [다]에 나타난 ‘자유’의 개념을 비교하시오. [20점]

■ 출제의도

이 문항은 제시문 [나]와 제시문 [다]에서 제시되는 ‘자유’ 개념의 차이를 비교, 요약하는 능력을 요구한다. 자유주의자들의 자유는 천부적인 자유권이자, 개인들의 사적 영역에서 주권자로서 배타적인 권리를 누리는 것이기에 타인의 간섭으로부터의 자유가 핵심 논지이다. 반면 공화주의적 자유는 타인의 간섭이 부재하는 상태를 넘어 자의적 지배가 없는, 주종적 지배관계의 부재가 핵심적인 요건이다. 이 문항은 각각의 제시문들에서 이 차이들을 이해할 수 있는 능력을 요구한다.

■ 우수답안

제시문 [나]의 ‘자유’는 모든 인간에게 주어진 원초적 상태로서, 타인에 의해 제한되고, 간섭될 수 없는 것이며, 개인이 자신의 몸이나 정신에 대해 완전한 주권자로서 마음대로 할 수 있는 권리이다. 다만 이와 같은 자유주의 관점에서의 자유라 하더라도 다른 사람에게 영향을 주는 행위에 한해서는 개인의 자유를 억압하는 제도, 즉 ‘사회’가 개인의 자유에 간섭할 수 있다.

이에 비해 제시문 [다]의 ‘자유’는 다른 개인이나 사회로부터 간섭을 받지 않는 정도가 아니라 주종적 지배 자체가 존재하지 않는 상태를 뜻하는 개념이다. 간섭이 없는 상태를 온전한 ‘자유’라고 보는 시각도 있을 수 있으나, 제시문 [다]의 관점에서는 현재까지 간섭이 발생하지 않았다고 하더라도 타인의 자의적 의지에 노출되어 있다면 그것은 진정한 자유라고 보기 어렵다. 즉 원하기만 하면 언제라도 압제를 행할 수 있는 권력에 종속되어 있는 상태라면 이제까지 압제나 간섭을 겪지 않았다 해도 그것은 예속 상태에 놓여 있는 것이다.

이렇게 볼 때 제시문 [나]의 자유는 간섭이 없는 개인의 절대적 권리에 초점을 맞춘 개념이라면, 제시문 [다]에서는 법의 제재를 괘념치 않고 남을 마음대로 억압할 수 있는 권력의 자의적 지배가 없는 상태로 자유를 규정함으로써 훨씬 더 엄격하고 제한적인 자유 개념을 제시하였다고 볼 수 있다.

■ 우수답안 분석

이 답안에서는 제시문 [나]의 ‘자유’ 개념을 간섭의 부재에 초점을 맞추어 설명하고, 이어 타인에 영향을 줄 때만 예외적으로 사회의 간섭을 인정하는 밀의 논의에 대해 서술하고 있다. 또한 제시문 [다]에 대에서는 타인의 간섭을 넘어 주종적 지배 자체가 존재하지 않는 상태로서의 ‘자유’ 개념에 주목한다. 간섭이 실제 발생하지 않고 있더라도 타인의 자의적 의지에 노출되어 있다면 그것은 진정한 자유라고 보기 어렵다는 공화주의적 자유의 핵심 논지를 잘 설명하고 있는 것이다. 이어 두 제시문 사이의 ‘자유’ 개념에 대해, 간섭의 부재에 초점을 두고 개인의 절대적 권리에 기반한 제시문 [나]의 자유와, 남을 마음대로 억압할 수 있는 권력의 자의적 지배가 부재한 상태를 강조한 제시문 [다]의 자유의 특징을 비교하여 서술함으로써 문항의 요구에 적절히 답하고 있다.

[문항2] (1) 제시문 [라]의 ㉠과 제시문 [마]의 ㉡의 목적의 차이를 설명하시오. [15점]

■ 출제의도

문항 (1)과 (2)는 사회과학 연구의 데이터를 분석 과정에서 이상치를 처리하는 방식과, 이상치가 결과에 어떤 방식으로 영향을 줄 수 있는지를 회귀선과 서포트 벡터 머신(SVM)을 통해 보여주고자 한다. 선형 회귀선은 종속 변수(성적)를 독립 변수(공부 시간)로 설명하고 예측하기 위해 설정되며, 그 목적은 변수 간의 연속적인 관계를 드러내고 예측 가능한 모델을 구성하는 데 있다. 서포트 벡터 머신의 결정 경계는 두 부류의 데이터를 최대한 분리하기 위해 마진을 극대화하는 방식으로 선택되며, 이는 분류의 일반화 성능을 높이는 데 목적이 있다. 즉, 회귀선과 결정 경계는 모두 데이터의 특징을 반영하는 직선이지만, 각각의 설정 목적과 기준은 서로 다르다. 회귀 분석에서는 이상치가 회귀선의 기울기와 절편을 크게 왜곡할 수 있으며, SVM 분류에서는 이상치로 인해 마진이 축소되거나 완전한 분리가 어려워질 수 있어, 경우에 따라 오차를 허용하거나 고차원 사상을 적용해야 할 필요가 있다. 이 문항은 이러한 차이를 명확히 구분하고, 데이터 처리에서 신뢰할 수 있는 모델을 구성하기 위해 이상치에 주의를 기울여야 하는 이유를 깊이 이해하는 능력을 종합적으로 평가하고자 한다.

■ 우수답안

제시문 [라]의 ㉠선형 회귀선은 데이터의 전반적 경향을 파악하기 위해 설정하는 선이다. 예를 들어, ‘공부 시간’과 ‘성적’ 간의 관계를 분석하기 위해 측정한 데이터에 가장 부합하는 직선 L을 구해 이를 예측과 해석에 활용한다. 이 선은 각 데이터 점에서 직선까지의 수직 거리(잔차)를 제곱해 합이 최소가 되도록 구하며, 공부 시간이 변할 때 성적이 어떻게 달라지는지를 보여준다. 직선 L은 <그림 1>에서 이상치 X의 존재를 드러내고, 이를 제거하면 <그림 2>처럼 데이터의 특징을 더 정확히 파악할 수 있다. 따라서 ㉠은 경향을 나타내고 이상치를 판별하고 제거해 분석의 정확성을 높이는 데 목적이 있다.

제시문 [마]의 ㉡결정 경계는 ㉠과 달리 분류를 위한 선으로, 두 부류 간의 명확한 경계를 설정한다. 마진이 최대인 구분선으로 각 데이터가 어느 집단에 속하는지를 안정적으로 판단할 수 있다. 제시문 [마]의 직선 b의 경우, 두 집단의 경계를 선명히 보여 주는 동시에, 그 분류를 통해 이상치 X의 존재와 위치를 확연히 드러냄으로써 개를 두 종류로 분류할 때 오류를 최소화하고 분류의 정확도를 높일 수 있게 한다.

종합하면 ㉠과 ㉡은 모두 데이터를 바탕으로 선형 모델을 설정하지만, ㉠은 변수 간 관계 설명과 예측에, ㉡은 집단 간 경계 설정과 분류의 정확성에 초점을 둔다는 차이가 있다.

■ 우수답안 분석

이 답안은 제시문 [라]의 선형 회귀선과 제시문 [마]의 결정 경계가 각각 어떤 목적을 가지고 설정되는지를 논리적으로 설명하였다. 답안에서는 ㉠선형 회귀선이 데이터의 전반적인 경향을 나타내어, 공부 시간과 성적의 관계를 예측하거나 해석하는 데 활용된다는 점을 제시하였다. 최소제곱법의 원리를 설명

하며, 회귀선이 각 데이터에 대한 잔차 제곱합을 최소화하는 방식으로 구해진다는 과정을 구체적으로 서술하였다. ㉡결정 경계에 대해서는 마진을 최대화하여 두 부류의 데이터를 가장 안정적으로 구분할 수 있도록 한다는 점을 중심으로 설명하고, 분류 과정에서 그 기능적 목적을 제시하였다. 두 선이 모두 데이터를 대표하는 선형 모델이라는 공통점이 있지만, 회귀선은 변수 간 관계의 설명과 예측에 초점을 두고, 결정 경계는 분류의 정확도를 극대화하는 데 목적이 있다는 점에서 서로 차이가 있음을 논리적으로 설명하였다.

[문항2] ⑵ 제시문 [라]와 제시문 [마]에 나타난 '이상치'가 결과에 미치는 영향을 비교하시오. [15점]

■ 출제의도

문항 (1)과 (2)는 사회과학 연구의 데이터를 분석 과정에서 이상치를 처리하는 방식과, 이상치가 결과에 어떤 방식으로 영향을 줄 수 있는지를 회귀선과 서포트 벡터 머신(SVM)을 통해 보여주고자 한다. 선형 회귀선은 종속 변수(성적)를 독립 변수(공부 시간)로 설명하고 예측하기 위해 설정되며, 그 목적은 변수 간의 연속적인 관계를 드러내고 예측 가능한 모델을 구성하는 데 있다. 서포트 벡터 머신의 결정 경계는 두 부류의 데이터를 최대한 분리하기 위해 마진을 극대화하는 방식으로 선택되며, 이는 분류의 일반화 성능을 높이는 데 목적이 있다. 즉, 회귀선과 결정 경계는 모두 데이터의 특징을 반영하는 직선이지만, 각각의 설정 목적과 기준은 서로 다르다. 회귀 분석에서는 이상치가 회귀선의 기울기와 절편을 크게 왜곡할 수 있으며, SVM 분류에서는 이상치로 인해 마진이 축소되거나 완전한 분리가 어려워질 수 있어, 경우에 따라 오차를 허용하거나 고차원 사상을 적용해야 할 필요가 있다. 이 문항은 이러한 차이를 명확히 구분하고, 데이터 처리에서 신뢰할 수 있는 모델을 구성하기 위해 이상치에 주의를 기울여야 하는 이유를 깊이 이해하는 능력을 종합적으로 평가하고자 한다.

■ 우수답안

제시문 [라]는 이상치가 데이터의 특징을 파악하는 데 부정적 영향을 미칠 수 있음을 보여 준다. 예를 들어, 공부 시간이 적음에도 성적이 매우 높은 학생 한 명의 자료만으로도 직선 L의 위치나 기울기가 바뀌어 전체 분석에 오차가 생길 수 있다. 그러므로 이상치는 데이터의 경향을 나타내는 선형 회귀선에 대한 신뢰성을 떨어뜨리며, 결과적으로 데이터로부터 도출된 결론의 정확성을 낮춘다.

제시문 [마]에서는 이상치가 분류 경계의 정확성을 떨어뜨리거나 분류 자체를 어렵게 만들 수 있다. 서포트 벡터 머신(SVM)은 두 집단을 구분할 때 각 범주의 데이터 중 경계에 가장 가까운 점들과의 수직 거리인 마진을 최대화하는 결정 경계를 설정한다. 이때 극단적 위치의 이상치 때문에 경계선을 그리지 못하는 상황이 생길 수 있다. 이러한 상황에서 SVM은 이상치를 제거하거나, 커널 트릭과 같은 방법을 활용하여 이상치의 영향을 최소화하려는 전략을 취한다.

두 제시문 모두 이상치가 분석에 부정적 영향을 준다는 점을 공통으로 설명하지만, 제시문 [라]는 이상치가 경향을 왜곡하는 점을, 제시문 [마]는 분류 자체를 어렵게 하는 점을 중심으로 다루고 있다는 차이가 있다.

■ 우수답안 분석

이 답안은 제시문 [라]와 [마]에서 이상치가 분석 결과에 미치는 영향을 논리적으로 비교하였다. 제시문 [라]에서는 공부 시간과 성적의 사례를 들어 이상치가 선형 회귀선의 기울기에 미치는 왜곡 효과와 그로 인해 발생하는 신뢰성이나 정확성의 하락에 대해 설명하였다. 제시문 [마]에서는 서포트 벡터 머신의 결정 경계 형성과정에서 이상치가 어떻게 분류를 방해하는지를 서술하였다. 이상치가 두 집단의 완전한 선형 분리를 불가능하게 만들어 분류의 정확도를 크게 저하시킬 수 있다는 점과, 이를 극복하기 위한 커널 트릭이나 이상치 제거 등의 전략을 제시하였다.

[문항3]
⑴ 제시문 [I]을 참조하여 A씨의 순보험료를 계산하시오. [5점]

⑵ 제시문 [II]를 참조하여 A씨가 손해보험에 가입하지 않았을 때의 효용의 기댓값을 계산하시오. [10점]

⑶ A씨가 손해보험에 가입했을 때의 효용의 기댓값을 계산하고, A씨가 손해보험에 가입하는 것이 유리한지를 판단하여 설명하시오. [15점]

■ 출제의도

제시문 [I]은 손해보험의 기본 원리와 구성 요소를 설명하고 있으며, 제시문 [II]는 불확실성이 존재하는 상황에서 개인 의사결정을 분석하는 데 필요한 효용함수의 개념과 의사결정의 원리를 다루고 있다. 본 문항은 제시문의 내용을 정확히 이해하고, 이를 실제 손해보험 가입 여부를 결정하는 상황에 적절히 적용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

■ 우수답안

⑴ 순보험료 = 손실의 기댓값 = 화재 발생 시 손실 × 화재 발생 확률 + 화재 미발생 시 손실 × 화재 미발생 확률

$$= 8{,}000{,}000\text{원} \times \frac{5}{8} + 0\text{원} \times \frac{3}{8}$$

$$= 5{,}000{,}000\text{원}$$

⑵ 다음 표는 A씨가 보험에 가입하지 않았을 때 재산의 가치와 효용을 정리한 것이다.

경우	확률	재산의 가치	효용
화재 발생	$\frac{5}{8}$	9,000,000원 − 8,000,000원 = 1,000,000원	$\sqrt{1{,}000{,}000} = 1{,}000$
화재 미발생	$\frac{3}{8}$	9,000,000원 − 0원 = 9,000,000원	$\sqrt{9{,}000{,}000} = 3{,}000$

보험 미가입 시 효용의 기댓값 = 화재 발생 시 효용 × 화재 발생 확률 + 화재 미발생 시 효용 × 화재 미발생 확률

$$= 1{,}000 \times \frac{5}{8} + 3{,}000 \times \frac{3}{8}$$

$$= 1{,}750$$

(3) 다음 표는 A씨가 보험에 가입했을 때 재산의 가치와 효용을 정리한 것이다.

경우	확률	재산의 가치	효용
화재 발생	$\frac{5}{8}$	9,000,000원 − 5,000,000원 − 8,000,000원 + 8,000,000원 = 4,000,000원	$\sqrt{4,000,000}$ $= 2,000$
화재 미발생	$\frac{3}{8}$	9,000,000원 − 5,000,000원 − 0원 + 0원 = 4,000,000원	$\sqrt{4,000,000}$ $= 2,000$

보험 가입 시 효용의 기댓값 = 화재 발생 시 효용 × 화재 발생 확률

+ 화재 미발생 시 효용 × 화재 미발생 확률

$= 2,000 \times \frac{5}{8} + 2,000 \times \frac{3}{8}$

$= 2,000$

보험 가입 시 기대 효용이 보험 미가입 시 기대 효용보다 크기 때문에 A씨는 보험에 가입하는 것이 더 유리하다.

■ 우수답안 분석

문항 (1)에서는 제시문 [Ⅰ]에 제시된 순보험료의 정의를 정확히 이해하고, 이를 사례에 적용해서 실제 순보험료를 계산하였다.

문항 (2)에서는 화재가 발생했을 때와 화재가 발생하지 않았을 때의 재산의 가치를 바탕으로 각각의 경우에 대한 효용을 구한 후, 효용의 기댓값을 계산하였다.

문항 (3)에서는 손해보험에 가입한 경우이기 때문에 지급해야 하는 순보험료와, 화재가 발생할 시 수령하는 보험금을 모두 고려하였다. 화재 발생 여부에 따른 재산의 가치와 그에 따른 효용을 각각 계산한 뒤, 효용의 기댓값을 구하였으며, 손해보험을 가입하지 않은 경우와 손해보험에 가입한 경우의 효용의 기댓값을 비교하여, 어느 쪽이 유리한지 판단하여 설명하라는 문항의 요구에 충실히 답하였다.

3. 자연 I

[문제 1] 두 양수 a_1, a_2에 대하여, 부등식 $a_1 a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이 성립하는 것이 알려져 있다.

또한 등식 $a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = a_2$인 것도 알려져 있다.

이 사실들을 이용하여 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$$

(2) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 등식 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$임을 보이시오.

(3) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립한다고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여 다음 두 부등식이 각각 성립함을 보이시오.

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k},$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \le \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

(4) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여 부등식

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이 성립한다고 가정하고, 등식

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$라고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여

$$a_1 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$임을 보이시오.

■ 출제의도

이 문제는 교과서에서 다루는 두 개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 대소관계와 등호가 성립하기위한 필요충분조건이 2^n개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이에도 성립함을 증명하는 문제이다. 이를 위하여 $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$라는 단순한 사실과 두 개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 관계와 귀류법을 수리적으로 활용하여 결론을 유도하도록 부분 문제를 구성하였다.

■ 출제근거

수학, 황선욱 외, 미래엔: 명제의 역과 대우(귀류법) (pp. 199-201), 충분조건과 필요조건 (pp. 202-203), 절대부등식 (pp. 204-206)

■ 우수답안 및 해설

(1) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

풀이: $a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2) \cdot (a_3 a_4)$로 두 개씩 짝을 지으면, 두 개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여 $a_1 a_2 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$과 $a_3 a_4 \le \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$를 얻는다. 여기에서

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}$$

라고 하면, b_1과 b_2는 양수이므로 두 개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$b_1 b_2 \le \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2$$

이 성립하므로 위 부등식의 양변을 제곱하면

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 = (b_1 b_2)^2 \le \left(\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

이 성립한다.

(2) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 등식 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$임을 보이시오.

풀이: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$이면 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$임을 간단히 확인할 수 있다.

이제 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$이라고 가정하자. 가정 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$으로부터

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4 = a_1 a_2 a_3 a_4$$

이므로

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \ , \ \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2}$$

이다.

이제 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$이 성립함을 보이도록 하자. 만약 네 양수 중에서 $a_1 \ne a_2$라면,

$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이기 때문에, $a_1 a_2 a_3 a_4 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2$이 성립하기 위해서는

$a_3 a_4 > \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2$이어야만 한다. 그러나 두 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 관계에

의하여 $a_3 a_4 > \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2$는 성립할 수 없다. 따라서 귀류법에 의해 $a_1 = a_2$이 성립하여야만 한다.

마찬가지로 $a_3 = a_4$가 성립한다.

한편 앞선 결과 $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$와 $\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2}$로부터 $a_1 = a_3$이므로, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$가 성립한다.

(3) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립한다고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여 다음 두 부등식이 각각 성립함을 보이시오.

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k},$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \le \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

풀이: $2^{k+1} = 2^k + 2^k$이므로, $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}} = a_{2^k+2^k}$는 2^k개의 양수들이다. 따라서

$$a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_{2^k}\, a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} = (a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_{2^k}) \cdot (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})$$

로 구분하여 나타내면, 주어진 가정에 의하여 각각

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \text{과 } a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} \le \left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이므로 첫 번째 부등식이 성립한다.

$b_1 = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}$, $b_2 = \frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}$라 하면, 두 번째 부등식은 두 개의 양수에 대한 산술평균과 기하평균 사이의 관계로부터 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) = b_1 b_2 \le \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

(4) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여 부등식

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이 성립한다고 가정하고, 등식

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2^k} = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$라고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여

$$a_1 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$임을 보이시오.

풀이: $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$이면

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = (a_1)^{2^{k+1}} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2^{k+1}} a_1}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이므로 $a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ 이 성립한다.

이제 $a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ 일 때, $a_1 = \cdots = a_{2^{k+1}}$이 성립함을 보이자.

우선 $b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}$과 $b_2 = \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}$라 하면, 위 (3)의 두 부등식으로부터

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} \le b_1^{2^k} \cdot b_2^{2^k} = (b_1 b_2)^{2^k} \le \left(\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2\right)^{2^k} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이 성립한다. 이때

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이면 위 부등식에서 등호가 성립하므로 (3)의 두 부등식에서 등호가 성립한다. (3)의 두 번째 부등식의 등호가 성립하므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여 $b_1 = b_2$이다. 즉

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} = \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}$$

이다.

이제 $a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ 이면 $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$이 성립함을 보이도록 하자.

먼저 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$와 $a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$중에서 적어도 하나의 등호가 성립하지 않는다고 가정하자. $a_1 = \cdots = a_{2^k}$이 성립하지 않는 경우, 주어진 가정에 의하여

$$a_1 \cdots a_{2^k} < \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이다. 위 결과로부터 (3)의 첫 번째 부등식에서 등호가 성립하므로

$$a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^k+2^k} > \left(\frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^k+2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이 성립한다. 그러나 이 부등식은 주어진 가정에 모순이다. 따라서 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$이 성립하여야만 한다. 마찬가지 방법으로 $a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$도 성립하여야 한다.

한편 앞선 결과 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$, $a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$와 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} = \dfrac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}$ 로부터 $a_1 = a_{2^k+1}$이다. 그러므로 $a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ 이면 $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$이다.

[문제 2] $a > 0$, $b > 0$ 이고 $a < b$일 때, 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \frac{2aa_1}{a+a_1}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}, \quad a_{2n+2} = \frac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a < a_n < b$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n} < a_{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n-1} > a_{2n+1}$이 성립함을 보이시오.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n} < a_{2n+2}$이 성립함을 보이시오.

■ 출제의도

이 문제는 수열의 귀납적 정의를 이해하고 수열의 성질을 유추하기 위해 수리적으로 추론하는 문제이다. 특히 수열의 성질들을 유추하는 과정에서 귀납적으로 정의된 수열들이 만족시키는 수리적 상황을 이해하고 적용하는 능력을 평가한다. 또한 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 성질들을 증명하는 추론 능력을 평가한다.

2-(1) 귀납적으로 정의된 수열이 만족시키는 수리적 성질을 유추하기 위해 수학적 귀납법을 이용하는 추론 능력을 점검한다.

2-(2) 귀납적으로 정의된 수열이 만족시키는 대소관계를 유추하기 위해 수학적 귀납법을 이용하는 추론 능력을 점검한다.

2-(3) 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 앞선 문항의 결과들을 적용할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

2-(4) 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 앞선 문항의 결과들을 적용할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

■ 출제근거

수학I, 황선욱 외, 미래엔: 수열의 귀납적 정의 (pp. 155-156), 수학적 귀납법 (pp. 158-165)

■ 우수답안 및 해설

(1) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a < a_n < b$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

풀이: (i) $a<b$이므로 $a<\frac{a+b}{2}<b$이다. $a_1=\frac{a+b}{2}$이므로 $a<a_1<b$이다.

한편,

$$a_2-a=\frac{2aa_1}{a+a_1}-a=\frac{a(2a_1-a-a_1)}{a+a_1}=\frac{a(a_1-a)}{a+a_1}$$

이고 $0<a<a_1$이므로 $a<a_2$이다. 또한

$$b-a_2=b-\frac{2aa_1}{a+a_1}=\frac{ba+ba_1-2aa_1}{a+a_1}=\frac{a(b-a_1)+a_1(b-a)}{a+a_1}$$

이고 $0<a<a_1<b$이므로 $a_2<b$이다.

따라서 $n=1$일 때, $a<a_{2n-1}<b$, $a<a_{2n}<b$가 성립한다.

(ii) 자연수 n에 대하여 $a<a_{2n-1}<b$, $a<a_{2n}<b$가 성립함을 가정하면,

$$\frac{a+a}{2}<\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}<\frac{b+b}{2}$$

이고

$$a_{2n+1}=\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}$$

이므로 $a<a_{2n+1}<b$이다.

한편,

$$a_{2n+2}-a=\frac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}-a=\frac{2a_{2n}a_{2n+1}-aa_{2n}-aa_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}=\frac{a_{2n}(a_{2n+1}-a)+a_{2n+1}(a_{2n}-a)}{a_{2n}+a_{2n+1}}$$

이고 $0<a<a_{2n}$, $0<a<a_{2n+1}$이므로 $a<a_{2n+2}$이다. 또한

$$b-a_{2n+2}=b-\frac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}=\frac{ba_{2n}+ba_{2n+1}-2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}=\frac{a_{2n}(b-a_{2n+1})+a_{2n+1}(b-a_{2n})}{a_{2n}+a_{2n+1}}$$

이고 $0<a_{2n}<b$, $0<a_{2n+1}<b$이므로 $a_{2n+2}<b$이다. 따라서 $a<a_{2n+2}<b$이다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a<a_n<b$이 성립한다.

별해: (i) $a<b$이므로 $a<\frac{a+b}{2}<b$이다. $a_1=\frac{a+b}{2}$이므로 $a<a_1<b$이다.

한편, $a_2=\frac{2aa_1}{a+a_1}=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}}$이고 $a<a_1<b$이므로

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a_1}<\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$$

이며

$$a=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}<a_2=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}}<\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}=b$$

이다.

따라서 $n=1$일 때, $a<a_{2n-1}<b$, $a<a_{2n}<b$가 성립한다.

(ii) 자연수 n에 대하여 $a<a_{2n-1}<b$, $a<a_{2n}<b$가 성립함을 가정하면,

$$a=\frac{a+a}{2}<a_{2n+1}=\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}<\frac{b+b}{2}=b$$

이다. 한편, $a_{2n+2}=\dfrac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}=\dfrac{2}{\frac{1}{a_{2n+1}}+\frac{1}{a_{2n}}}$ 이고 $a<a_{2n}<b$, $a<a_{2n+1}<b$이므로

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a_{2n}}<\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a_{2n+1}}<\frac{1}{a}$$

이며

$$a=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}<a_{2n+2}=\frac{2}{\frac{1}{a_{2n+1}}+\frac{1}{a_{2n}}}<\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}=b$$

이다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a<a_n<b$이 성립한다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n}<a_{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

풀이: (i) $a>0$이고 (1)의 결과로부터 $a_1>a$이므로

$$a_3-a_2=\frac{a_1+a_2}{2}-a_2=\frac{a_1-a_2}{2}=\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{2aa_1}{a+a_1}\right)=\frac{a_1}{2(a+a_1)}(a+a_1-2a)=\frac{a_1(a_1-a)}{2(a+a_1)}>0$$

이다. 따라서 $n=1$일 때, $a_{2n}<a_{2n+1}$가 성립한다.

(ii) 자연수 n에 대하여 $a_{2n}<a_{2n+1}$이 성립함을 가정하자.

$$a_{2n+3}-a_{2n+2}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{2}-a_{2n+2}=\frac{a_{2n+1}-a_{2n+2}}{2}$$

이고 $a_{2n+2}=\dfrac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}$이므로

$$a_{2n+3}-a_{2n+2}=\frac{a_{2n+1}}{2(a_{2n}+a_{2n+1})}(a_{2n}+a_{2n+1}-2a_{2n})=\frac{a_{2n+1}}{2(a_{2n}+a_{2n+1})}(a_{2n+1}-a_{2n})$$

이다. (1)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a>0$이고, 가정으로부터 $a_{2n}<a_{2n+1}$ 이므로 $a_{2n+2}<a_{2n+3}$이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}<a_{2n+1}$이 성립한다.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n-1} > a_{2n+1}$이 성립함을 보이시오.

풀이: (i) $n=1$일 때,

$$a_3 - a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} - a_1 = \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2aa_1}{a+a_1} - a_1\right) = \frac{a_1}{2(a+a_1)}(a-a_1)$$

이고, $a_1 > a$이므로 $a_3 < a_1$이 성립한다.

(ii) 자연수 $n = 2, 3, 4, \cdots$에 대하여

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2} - a_{2n-1} = \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a_{2n-2}a_{2n-1}}{a_{2n-2} + a_{2n-1}} - a_{2n-1}\right) = \frac{a_{2n-1}(a_{2n-2} - a_{2n-1})}{2(a_{2n-2} + a_{2n-1})}$$

이다. 한편, (1)의 결과로부터 $a_n > a > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$이고, (2)의 결과로부터 $a_{2n-2} < a_{2n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$이므로 $a_{2n-1} > a_{2n+1}$이 성립한다.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n} < a_{2n+2}$이 성립함을 보이시오.

풀이: 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n} + a_{2n+1}} - a_{2n} = \frac{a_n}{a_{2n} + a_{2n+1}}(2a_{2n+1} - a_{2n} - a_{2n+1}) = \frac{a_n}{a_{2n} + a_{2n+1}}(a_{2n+1} - a_{2n})$$

이다. 한편, 모든 자연수 n에 대하여 (1)의 결과로부터 $a_n > a > 0$이고, (2)의 결과로부터 $a_{2n} < a_{2n+1}$이므로 $a_{2n} < a_{2n+2}$이 성립한다.

[문제 3] 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(2\cos t, \sin t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3}, 0), \mathrm{F}'(\sqrt{3}, 0)$에서 점 P까지 거리의 합이 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

(2) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{Q}(3\sec t, 2\tan t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{13}, 0), \mathrm{F}'(\sqrt{13}, 0)$에서 점 Q까지 거리의 차가 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

(3) 2보다 큰 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\mathrm{P}_n\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(3\sec\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 2\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $\frac{5}{4}B_n$이라 할 때, B_n을 구하시오.

(4) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 2보다 큰 자연수 n에 대하여

$$C_n = \int_0^1 \frac{B_n}{\cos(g(B_n x))}\,dx$$

로 정의할 때, 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} C_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

■ 출제의도

이 문제는 이차곡선의 정의, 삼각함수 사이의 관계, 직선의 방정식과 점과 직선 사이의 거리, 역함수의 미분법, 치환적분법 및 정적분의 정의, 등비급수의 합에 대한 종합적인 이해를 바탕으로 급수의 합을 찾는 문제이다. 이차곡선의 정의와 직선의 방정식과 점과 직선 사이의 거리를 이용한 삼각형의 넓이를 도출할 수 있는 수리적 계산 능력을 평가하고, 정적분의 정의와 역함수의 미분법에 대한 이해를 바탕으로 급수의 일반항을 찾는 추론 능력을 평가한다. 또한, 등비급수의 수렴 조건과 급수의 합을 구하는 교육과정의 충실한 학습 결과를 평가한다.

(1) 타원의 정의에 대한 학습 성취를 평가한다.
(2) 쌍곡선의 정의에 대한 학습 성취를 평가한다.
(3) 직선의 방정식 및 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 찾는 수리적 추론 능력과 이 과정에서 삼각함수 사이의 관계에 대한 학습 성취를 평가한다.
(4) 치환적분법과 역함수의 미분법, 정적분의 정의를 이용하여 주어진 수열로 정의된 정적분의 값을 찾는 수리적 추론 능력을 평가하며, 등비급수의 수렴 조건 및 급수의 합을 찾는 수리적 계산 능력을 평가한다.

■ 출제근거

수학, 황선욱 외, 미래엔: 직선의 방정식 (pp. 125-127), 점과 직선 사이의 거리 (pp. 132-134)
수학II, 황선욱 외, 미래엔: 부정적분 (pp. 115-120). 정적분 (pp. 122-128)
기하, 황선욱 외, 미래엔: 타원 (pp. 26-30). 쌍곡선 (pp. 42-47)
미적분, 황선욱 외, 미래엔: 등비급수 (pp. 34-36). 음함수와 역함수의 미분법 (pp. 94-97). 치환적분법 (pp. 143-149)

■ 우수답안 및 해설

(1) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(2\cos t, \sin t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3}, 0), \mathrm{F}'(\sqrt{3}, 0)$에서 점 P까지 거리의 합이 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

풀이: 두 점에서 거리의 합이 일정한 이차곡선은 타원이며, 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } b^2 = a^2 - c^2\text{)}$$

$c^2 = 3$이고 점 P가 이 곡선 위에 있으므로, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{4\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{a^2 - 3} = 1$$

위 식은 $t = 0$일 때에도 성립하므로 $a^2 = 4$이다. 따라서 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{Q}(3\sec t, 2\tan t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{13}, 0), \mathrm{F}'(\sqrt{13}, 0)$에서 점 Q까지 거리의 차가 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

풀이: 두 점에서 거리의 차가 일정한 이차곡선은 쌍곡선이며, 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } b^2 = c^2 - a^2\text{)}$$

$c^2 = 13$이고 점 Q가 이 곡선 위에 있으므로, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{9\sec^2 t}{a^2} - \frac{4\tan^2 t}{13 - a^2} = 1$$

위 식은 $t = 0$일 때에도 성립하므로 $a^2 = 9$이다. 따라서 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

(3) 2보다 큰 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\mathrm{P}_n\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(3\sec\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 2\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $\frac{5}{4}B_n$이라 할 때, B_n을 구하시오.

풀이: 2보다 큰 자연수 n에 대해 각 $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$이라 하자. 선분 AP_n의 길이는

$$\overline{\mathrm{AP}_n} = \sqrt{\left(2\cos\theta_n + \frac{3}{2}\right)^2 + (\sin\theta_n)^2}$$

이다. 점 A와 P_n을 지나는 직선 ℓ의 방정식은

$$\sin\theta_n x - \left(2\cos\theta_n + \frac{3}{2}\right)y + \frac{3}{2}\sin\theta_n = 0$$

이다. 점 $\mathrm{Q}_n = \left(3\sec\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 2\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$에서 직선 ℓ까지의 거리는

$$h = \frac{\left|\sin\theta_n(3\sec\theta_n) - \left(2\cos\theta_n + \frac{3}{2}\right)(2\tan\theta_n) + \frac{3}{2}\sin\theta_n\right|}{\sqrt{\sin^2\theta_n + \left(2\cos\theta_n + \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{5|\sin\theta_n|}{2\overline{\mathrm{AP}_n}}$$

이고, 따라서 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}_n}\times h = \frac{5}{4}|\sin\theta_n|$이다. $0 < \theta_n = \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$이므로,

$B_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$이다.

(4) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 2보다 큰 자연수 n에 대하여

$$C_n = \int_0^1 \frac{B_n}{\cos(g(B_n x))}\,dx$$

로 정의할 때, 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} C_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

풀이: 치환적분을 이용하면 $C_n = \int_0^{B_n} \frac{1}{\cos(g(x))}\,dx$이다. $f'(x) = \cos x$이므로 역함수의 미분법에 의해

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))}$$

임을 알 수 있고, 따라서 $g(x)$는 $\frac{1}{\cos(g(x))}$의 한 부정적분이 된다. 정적분의 정의에 의해

$C_n = \int_0^{B_n} g'(x)\,dx = g(B_n) - g(0)$이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$이므로

$g(B_n) = g\left(f\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = \frac{\pi}{2^n}$이다. $g(0) = 0$이므로 $C_n = \frac{\pi}{2^n}$임을 알 수 있고, 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} C_n$은

첫째항이 $\frac{\pi}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수가 되므로 수렴하며, 그 합은 $\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$이다.

4. 자연 II

[문제 1] 모든 자연수 n에 대하여 수열 S_n을 다음과 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^n}\, dx$$

(1) 다음 두 등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 4\sin x \cos x,\ \ \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x)$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} S_n + \frac{1}{2^{n+2} n}$$

이 성립함을 보이시오.

(3) 모든 자연수 m에 대하여 수열 A_m을 $A_m = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \cdots \times \frac{2m}{2m-1}$이라 정의한다.

모든 자연수 m에 대하여 $\sqrt{2m+1} \le A_m \le 2\sqrt{m}$이 성립함을 보이시오.

(4) 실수 α에 대하여 $\alpha < \frac{1}{2}$이면 극한값 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{n^\alpha \sqrt{k}}{A_n}(A_k S_{k+1} - A_{k-1} S_k)$이 0임을 보이시오.

■ 출제의도

이 문제는 적분으로 정의된 수열을 분석하고, 주어진 조건을 바탕으로 극한값을 추론하는 과정을 통해 극한에 대한 이해를 평가하고자 한다. 함수의 곱의 미분법, 삼각함수의 미분 및 부분적분법을 활용하여 수열의 귀납적 관계를 찾아낼 수 있는 수학적 계산 능력을 평가한다. 또한, 수학적 귀납법을 바르게 사용하여 주어진 수열이 만족하는 부등식을 유도하는 수리적 능력과 수리적 기술능력을 평가한다. 나아가, 극한값의 대소 관계를 판단하고 등비급수의 합을 적절히 활용하여 주어진 조건을 만족함을 이끌어 내는 수리적 추론 능력과 통합적 사고력을 평가하고자 한다.

■ 출제근거

수학 I, 황선욱 외, 미래엔: 삼각함수 (pp. 74-79), 수열의 귀납적 정의 (pp. 155-156), 수학적 귀납법 (pp. 158-161)

수학 II, 황선욱 외, 미래엔: 도함수 (pp. 61-66), 정적분 (pp. 122-128)

미적분, 황선욱 외, 미래엔: 수열의 극한 (pp. 11-15), 등비급수 (pp. 34-36), 삼각함수의 미분 (pp. 75-76), 여러 가지 함수의 적분 (pp. 137-142), 부분적분법 (pp. 151-154)

■ 우수답안 및 해설

(1) 다음 두 등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 4\sin x \cos x,\ \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}(1-\sin^4 x - \cos^4 x)$$

풀이: 삼각함수의 미분에 의해, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$이다. 함수의 곱의 미분법에 의해, $\frac{d}{dx}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 4\sin x\cos x$이 성립한다. 한편, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로,

$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^2 x &= \frac{1}{2}((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^4 x - \cos^4 x)\\ &= \frac{1}{2}(1-\sin^4 x - \cos^4 x)\end{aligned}$$

이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}S_n + \frac{1}{2^{n+2}n}$$

이 성립함을 보이시오.

풀이: 모든 자연수 n에 대하여 문항 (1)의 첫 번째 등식을 이용하여 부분적분법을 적용하면,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^n}(\sin^2 x - \cos^2 x)'\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (-2n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)^2}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^{n+1}}\,dx\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x(\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x)}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^{n+1}}\,dx\end{aligned}$$

이다. 문항 (1)의 두 번째 등식을 대입하면,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2^{n+1}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x\cos x}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^n} - \frac{\sin x\cos x}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^{n+1}}\right)dx\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} + 2nS_n - 2nS_{n+1}\end{aligned}$$

이므로 $S_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}S_n + \frac{1}{2^{n+2}n}$이다.

(3) 모든 자연수 m에 대하여 수열 A_m을 $A_m = \frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2m}{2m-1}$이라 정의한다. 모든 자연수 m에 대하여 $\sqrt{2m+1}\le A_m \le 2\sqrt{m}$이 성립함을 보이시오.

풀이: 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

$m=1$이면 $A_1=2$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$m=k$일 때 $\sqrt{2k+1}\le A_k \le 2\sqrt{k}$이 성립한다고 가정하자. 정의에 의해 $A_{k+1}=\frac{2k+2}{2k+1}A_k$이므로,

$$\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}\le A_{k+1}\le \frac{4(k+1)\sqrt{k}}{2k+1}$$

이 성립한다. 한편, 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$(2n+1)(2n+3)<(2n+2)^2,\ 4n(n+1)<(2n+1)^2$$

이 성립하므로, $\sqrt{2k+3}\le\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}$, $\frac{4(k+1)\sqrt{k}}{2k+1}\le 2\sqrt{k+1}$이다. 그러므로 $m=k+1$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 m에 대하여 성립한다.

(4) 실수 α에 대하여 $\alpha<\frac{1}{2}$이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^\alpha\sqrt{k}}{A_n}(A_kS_{k+1}-A_{k-1}S_k)$이 0임을 보이시오.

풀이: 문항 (2)로부터 식 $A_kS_{k+1}-A_{k-1}S_k=\frac{A_k}{2^{k+2}k}$을 2이상의 모든 자연수 k에 대하여 얻는다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^\alpha\sqrt{k}}{A_n}(A_kS_{k+1}-A_{k-1}S_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^\alpha A_k}{A_n2^{k+2}\sqrt{k}}$$

이다. $\alpha<\frac{1}{2}$일 때, 위 극한값이 0임을 확인한다. 문항 (3)에 의해,

$$\frac{A_k}{\sqrt{k}}\le 2,\ \frac{1}{A_n}\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

이므로, 부등식

$$0\le\sum_{k=2}^{n}\frac{n^\alpha A_k}{A_n2^{k+2}\sqrt{k}}=\frac{n^\alpha}{A_n}\sum_{k=2}^{n}\frac{A_k}{2^{k+2}\sqrt{k}}\le\frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

이 성립한다. $\alpha<\frac{1}{2}$라 가정하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/2-\alpha}}=0$이므로, 극한값이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/2-\alpha}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=0$$

이고, 따라서 극한의 사잇값 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{n^\alpha\sqrt{k}}{A_n}(A_kS_{k+1}-A_{k-1}S_k)=0$을 얻는다.

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

(가) $-1 < x < 1$인 모든 실수 x에 대하여, $f(x) = |\cos \pi x|$이다.
(나) 임의의 실수 x에 대해 $f(x) = f(-x)$이다.
(다) 모든 자연수 n과 $n \le x < n+1$을 만족하는 실수 x에 대하여

$$f(x) = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(f\left(2^n(x-n) - [2^n(x-n)]\right) - 1\right)$$

가 성립한다. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) = 1$임을 보이시오.

(2) 직선 $y = \dfrac{8}{9}$과 함수 $y = f(x)$의 교점의 개수를 구하시오.

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$의 값을 구하시오

■ 출제의도

본 문제는 주어진 함수의 조건들을 바탕으로 이 함수가 만족시키는 기본적인 성질들을 찾고 추가로 함수의 그래프와 x축 사이의 넓이에 해당하는 정적분을 치환적분을 이용하여 구하는 문제이다. 이 과정에서 귀납적으로 정의된 함수의 조건들을 통해 함수의 자연수에서의 값을 구할 수 있는지에 대한 수학적 추론 능력을 평가한다. 또한 함수의 그래프에 관한 이해를 바탕으로 그래프와 직선과의 교점의 개수를 찾는 문제를 통해 수학적 사고 능력을 평가한다. 마지막으로 치환적분을 활용하여 정적분의 값을 구하는 수학적 문제 해결능력을 평가한다.

■ 출제근거

수학, 박교식 외, 동아: 치환적분법 (pp. 134-139)
미적분, 홍성복 외, 지학사: 치환적분법 (pp. 144-147)
수학II, 이준열 외, 천재교육: 정적분 (pp. 121-127)
수학II, 황선욱 외, 미래엔: 정적분 (pp. 122-128)

■ 우수답안 및 해설

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=1$임을 보이시오.

풀이: 조건 (가)에 의해 $f(0)=|\cos 0|=1$이다. 모든 자연수 n에 대해서, 조건 (다)에 의해,

$$f(n)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(f(2^n(n-n)-[2^n(n-n)])-1\right)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n(f(0)-1)=1$$

이다.

(2) 직선 $y=\frac{8}{9}$과 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수를 구하시오.

풀이: 그래프의 개형을 살펴보고 양수 x를 $0<x\le 1$, $1\le x\le 2$, $2\le x\le 3$, $3\le x$로 나누어 살펴본다.

조건 (다)에 의해 임의의 자연수 n과 $0\le k<n$인 음이 아닌 정수 k에 대해서,

$$n+\frac{k}{2^n}\le x<n+\frac{k+1}{2^n}$$

인 실수 x가 $[2^n(x-n)]=k$를 만족하고 $0\le 2^n(x-n)-k<1$이므로

$$f(x)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(f(2^n(x-n)-[2^n(x-n)])-1\right)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(f(2^n(x-n)-k)-1\right)$$

이고 $-1\le f(2^n(x-n)-k)-1\le 0$이다.

(ㄱ) 만약 $3\le x$이면 $n\ge 3$ 이고, $0\le k<n$인 모든 음이 아닌 정수와

$$n+\frac{k}{2^n}\le x<n+\frac{k+1}{2^n}$$

인 실수 x에 대해서 n이 홀수이면 부등식

$$f(x)\ge 1>\frac{8}{9}$$

을 만족시키고, n이 짝수이면 부등식

$$f(x)\ge 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\ge\frac{80}{81}>\frac{8}{9}$$

을 만족시킨다. 따라서 $3\le x$인 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{8}{9}$인 실수는 존재하지 않는다.

(ㄴ) 만약 $0\le x<1$이면, $f(x)=|\cos\pi x|$이므로 $f(x)=\frac{8}{9}$인 양의 실수 x의 개수는 2이다.

(ㄷ) 만약 $1\le x<2$이면, 위 식에 의해 $f(x)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(f(2(x-1)-[2(x-1)])-1\right)$이고

$-1\le f(2(x-1)-[2(x-1)])-1\le 0$이다.

따라서 $1\le x<2$인 실수 x는

$$1=1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 0\le 1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(f(2(x-1)-[2(x-1)])-1\right)\le 1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-1)=\frac{4}{3}$$

을 항상 만족하므로 $f(x)=\frac{8}{9}$인 실수 x가 이 범위에서는 존재하지 않는다.

(ㄹ) 실수 x는 $2 \le x < 3$이고 $f(x) = \frac{8}{9}$을 만족시킨다고 하자. 위 식에 의해

$$f(4(x-2) - [4(x-2)]) = 0$$

이다.

(a) $2 \le x < \frac{9}{4}$인 실수 x에 대하여, $0 \le 4(x-2) < 1$이므로 이 범위에서는 $x = \frac{17}{8}$만 방정식 $f(4(x-2) - [4(x-2)]) = f(4(x-2)) = |\cos(4\pi x - 8\pi)| = 0$을 만족한다.

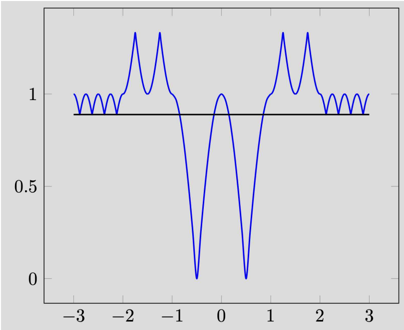
(b) $\frac{9}{4} \le x < \frac{10}{4}$인 실수 x에 대하여, $1 \le 4(x-2) < 2$이므로 이 범위에서는 $x = \frac{19}{8}$만 방정식 $f(4(x-2) - [4(x-2)]) = f(4(x-2) - 1) = |\cos(4\pi x - 9\pi)| = 0$을 만족한다.

(c) $\frac{10}{4} \le x < \frac{11}{4}$인 실수 x에 대하여, $2 \le 4(x-2) < 3$이므로 이 범위에서는 $x = \frac{21}{8}$만 방정식 $f(4(x-2) - [4(x-2)]) = f(4(x-2) - 2) = |\cos(4\pi x - 10\pi)| = 0$을 만족한다.

(d) $\frac{11}{4} \le x < 3$인 실수 x에 대하여, $3 \le 4(x-2) < 4$이므로 이 범위에서는 $x = \frac{23}{8}$만 방정식 $f(4(x-2) - [4(x-2)]) = f(4(x-2) - 3) = |\cos(4\pi x - 11\pi)| = 0$을 만족한다.

따라서 $2 \le x < 3$인 범위 내에서는 $x = \frac{17}{8}, \frac{19}{8}, \frac{21}{8}, \frac{23}{8}$에서만 $f(x) = \frac{8}{9}$을 만족한다.

(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ)에 따라 $f(x) = \frac{8}{9}$을 만족하는 양수인 실수 x의 개수는 6이다. $f(0) = 1$이고 조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$는 $f(x) = f(-x)$를 만족하므로, $f(x) = \frac{8}{9}$을 만족하는 실수 x의 개수는 12이다.



[그림 1]

(3) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$의 값을 구하시오

풀이: 조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$는 $f(x) = f(-x)$를 만족하므로,

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2\int_{0}^{3} f(x)dx$$

이다. 조건 (가)와 (1)에 의해, 모든 $0 \le x \le 1$인 실수 x에 대하여, $f(x) = |\cos \pi x|$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |\cos \pi x| dx = \int_0^{1/2} \cos \pi x\,dx - \int_{1/2}^{1} \cos \pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

이다. 조건 (다)에 의해, $1 \le x < \frac{3}{2}$인 실수 x에 대하여, $0 \le 2x - 2 < 1$이므로

$$f(x)=1-\frac{1}{3}(f(2x-2)-1)=1-\frac{1}{3}(|\cos(2\pi x-2\pi)|-1)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(|\cos(2\pi x-2\pi)|)$$

이고 $\frac{3}{2}\le x<2$인 실수 x에 대하여, $0\le 2x-3<1$이므로

$$f(x)=1-\frac{1}{3}(f(2x-3)-1)=1-\frac{1}{3}(|\cos(2\pi x-3\pi)|-1)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(|\cos(2\pi x-3\pi)|)$$

이다. 따라서

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^{3/2}f(x)dx+\int_{3/2}^2 f(x)dx=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\int_1^{3/2}|\cos(2\pi x-2\pi)|dx+\int_{3/2}^2|\cos(2\pi x-3\pi)|dx\right)$$

이고 치환적분법에 의해,

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\int_1^{3/2}|\cos(2\pi x-2\pi)|dx+\int_{3/2}^2|\cos(2\pi x-3\pi)|dx\right)$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1|\cos\pi x|dx=\frac{4}{3}-\frac{2}{3\pi}$$

이다. 비슷하게, 조건 (다)에 의해, $2\le x<\frac{9}{4}$인 실수 x에 대하여, $0\le 4x-8<1$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{9}(f(4x-8)-1)=1+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-8\pi)|-1)=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-8\pi)|)$$

이고 $\frac{9}{4}\le x<\frac{10}{4}$인 실수 x에 대하여, $0\le 4x-9<1$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{9}(f(4x-9)-1)=1+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-9\pi)|-1)=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-9\pi)|)$$

이고 $\frac{10}{4}\le x<\frac{11}{4}$인 실수 x에 대하여, $0\le 4x-10<1$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{9}(f(4x-10)-1)=1+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-10\pi)|-1)=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-10\pi)|)$$

이고 $\frac{11}{4}\le x<3$인 실수 x에 대하여, $0\le 4x-11<1$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{9}(f(4x-11)-1)=1+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-11\pi)|-1)=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}(|\cos(4\pi x-11\pi)|)$$

이다. 따라서

$$\int_2^3 f(x)dx=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(\int_2^{9/4}|\cos(4\pi x-8\pi)|dx+\int_{9/4}^{5/2}|\cos(4\pi x-9\pi)|dx\right.$$
$$\left.+\int_{5/2}^{11/4}|\cos(4\pi x-10\pi)|dx+\int_{11/4}^{3}|\cos(4\pi x-11\pi)|dx\right)$$

이고 치환적분법에 의해

$$\int_2^3 f(x)dx=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\int_0^1|\cos\pi x|dx=\frac{8}{9}+\frac{2}{9\pi}$$

이다. 정리하면,

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx=2\left(\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3\pi}+\frac{8}{9}+\frac{2}{9\pi}\right)=\frac{28}{9\pi}+\frac{40}{9}$$

이다.

[문제 3] 좌표평면 위의 네 점 O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 대하여 다음의 규칙에 따라 정사각형의 변 위의 점을 차례로 정할 때, 아래 물음에 답하시오. (단, 정사각형의 꼭짓점도 변 위의 점이다.) **[30점]**

(가) 원점 O를 첫 번째 점 P_1로 정하고 선분 AB의 한 점을 두 번째 점 P_2로 정한다. 이때 선분 P_1P_2를 포함하는 직선의 기울기를 $m\,(0 \le m \le 1)$이라 한다.
(나) 만약 $n\,(n>1)$번째 점 P_n이 정사각형의 꼭짓점이면 점 P_{n+1}을 새로 정하지 않고 점 P_n을 끝점이라 한다.
(다) 만약 $n\,(n>1)$번째 점 P_n이 끝점이 아니면 $(n+1)$번째 점 P_{n+1}을 선분 $P_{n-1}P_n$과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 선분 P_nP_{n+1}과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 같도록 정한다. (단, 점 P_{n+1}과 점 P_{n-1}은 같지 않다.)

(1) 기울기 $m=\frac{2}{3}$에 대하여 위의 규칙에 따라 정해진 점들 $P_n\,(n=1,2,3,\cdots)$을 모두 구하시오.

(2) $\frac{1}{20}<m<1$인 기울기 m에 대하여 규칙에 따라 정해진 점들이 꼭짓점 C를 제외한 선분 BC위에 있지 않고 꼭짓점 C(0,1)이 끝점이 된다. 조건을 만족시키는 기울기 m에 대하여 $\frac{1}{m}$을 모두 더한 값을 구하시오.

(3) 꼭짓점 C(0,1)가 끝점 P_{15}이 되는 기울기 m을 모두 구하시오.

■ 출제의도

이 문제는 좌표평면의 도형에 대하여 주어진 규칙을 이해하고 활용하여 도형의 점들을 바르게 결정하는 내용으로 구성되었다. 이 과정에서 직선의 기울기, 좌표평면의 대칭, 정사각형의 성질, 수열의 성질, 수열의 합, 정수의 성질과 특성을 바르게 적용하여 주어진 규칙을 이해하고 문항의 풀이에 활용하는 수리적 문해력과 조작적 활용 능력을 평가한다.

■ 출제근거

수학, 김원경 외, 비상: 좌표평면 (pp. 99-106), 직선의 방정식(pp. 112-122), 도형의 이동(pp. 141-148)
수학I, 김원경 외, 비상: 수열의 뜻 (pp. 117-118), 등차수열(pp. 119-126), 수열의 합(pp. 139-144)

■ 우수답안 및 해설

(1) 기울기 $m=\frac{2}{3}$에 대하여 위의 규칙에 따라 정해진 점들 $\mathrm{P}_n\,(n=1,2,3,\cdots)$을 모두 구하시오.

풀이: 규칙에 따라 $\mathrm{P}_1=(0,0)$이다. 점 P_2는 기울기 $m=\frac{2}{3}$이고 원점을 지나는 직선 $y=\frac{2}{3}x$과 직선 $x=1$의 교점이므로 $\mathrm{P}_2=\left(1,\frac{2}{3}\right)$이다. 점 P_3은 선분 BC위의 점으로 기울기 $m=-\frac{2}{3}$이고 점 $\mathrm{P}_2=\left(1,\frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선 $y=-\frac{2}{3}(x-1)+\frac{2}{3}$와 직선 $y=1$의 교점이므로 $\mathrm{P}_3=\left(\frac{1}{2},1\right)$이다.

점 P_4는 선분 CO위의 점으로 기울기 $m=\frac{2}{3}$이고 점 $\mathrm{P}_3=\left(\frac{1}{2},1\right)$를 지나는 직선 $y=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$와 y축의 교점이므로 $\mathrm{P}_4=\left(0,\frac{2}{3}\right)$이다. 점 P_5는 선분 OA위의 점으로 기울기 $m=-\frac{2}{3}$이고 점 $\mathrm{P}_4=\left(0,\frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$와 x축의 교점이므로 $\mathrm{P}_5=(1,0)$이다. $\mathrm{P}_5=(1,0)$가 꼭짓점 B이므로 끝점이다.

따라서 구하는 점들은 $\mathrm{P}_1=(0,0)$, $\mathrm{P}_2=\left(1,\frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{P}_3=\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\mathrm{P}_4=\left(0,\frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{P}_5=(1,0)$이다.

(2) $\frac{1}{20}<m<1$인 기울기 m에 대하여 규칙에 따라 정해진 점들이 꼭짓점 C를 제외한 선분BC위에 있지 않고 꼭짓점 $\mathrm{C}(0,1)$이 끝점이 된다. 조건을 만족시키는 기울기 m에 대하여 $\frac{1}{m}$을 모두 더한 값을 구하시오.

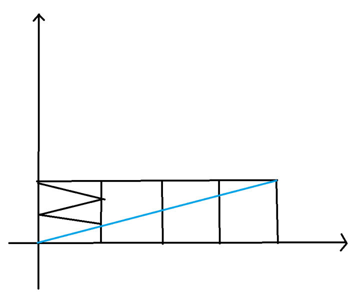
풀이: 주어진 규칙(다)에 따라 점을 정하는 과정은 홀수 번째 점을 지나는 기울기 m인 직선과 정사각형의 변의 다른 교점으로 다음 순서인 짝수 번째 점을 정하고, 짝수 번째 점을 지나는 기울기 $-m$인 직선과 정사각형의 변의 다른 교점으로 다음 순서인 홀수 번째 점을 결정한다.

규칙 (다)에서

'만약 점 P_n이 끝점이 아니면 $(n+1)$번째 점 P_{n+1}을 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 같도록 정한다.'

는 조건을 점 $\mathrm{P_n}$을 포함하는 정사각형의 한 변에 대하여 대칭이동한 정사각형에 관한 조건으로 생각하면

'기울기 $m, -m$을 교차로 사용하는 대신 같은 기울기 m에 대한 직선과 점 P_n을 포함하는 정사각형의 한 변에 대하여 대칭이동된 정사각형의 변의 교점을 구하고 이를 역으로 대칭 이동하여 점 P_{n+1}을 정한다.'



[그림 2]

로 바꾸어 활용할 수 있다.

점 P_1부터 차례로 $n\,(n>1)$번째 점 P_n이 정해졌을 때, 점 P_2을 포함하는 변에 대하여 주어진 정사각형을 대칭이동하고 이동된 정사각형과 선 $y=mx$의 교점으로 P_3에 대응하는 점을 정한다. 이렇게 이동된 정사각형과 점 P_3에 대응하는 점에 대하여 이 대응점을 포함하는 변에 대하여 대칭이동하고 이 정사각형과 직선 $y=mx$의 교점으로 점 P_4에 대응하는 점을 구한다. 이런 과정을 점 $P_{\mathrm{k}}(1\le k\le n-1)$에 대응하는 정사각형과 변에 대하여 차례로 시행하면 처음 주어진 정사각형을 오른쪽 또는 위쪽으로 차례로 대칭 이동하며 $(n-1)$개의 정사각형을 차례로 얻을 수 있으며 구하는 점들은 직선 $y=mx$와 이들 정사각형들의 변의 교점에 대응한다. 이때 꼭짓점 $C(0,1)$이 이동될 수 있는 좌표평면의 점은 자연수 $p,q(p\ge q)$에 대하여 $(2p,2q-1)$이다.

꼭짓점 $C(0,1)$이 끝점이므로 꼭짓점 $C(0,1)$이 이동될 수 있는 점 $(2p,2q-1)$을 지나는 직선으로 점들이 정해진다. 이때 만약 $2p$와 $2q-1$이 서로소가 아니면 점 $(2p,2q-1)$이전에 끝점에 대응하는 점이 결정되어 점 $(2p,2q-1)$에 대응하는 점을 끝점으로 정할 수 없다. 따라서 점 $(2p,2q-1)$이 끝점에 대응하기 위하여 $2p$와 $2q-1$이 서로소이다.

주어진 규칙에 따라 정해진 점들이 선분 BC의 점을 포함하지 않으므로 위쪽으로의 대칭이동 없이 오른쪽으로만의 대칭이동이 이루어진다. 따라서 꼭짓점 $C(0,1)$이 이동될 수 있는 점 $(2p,2q-1)$은 $(2p,1)$꼴이다.

그러므로 꼭짓점 C를 제외한 선분 BC의 점을 포함하지 않고 꼭짓점 $C(0,1)$이 끝점이 되는 조건을 만족하며 $C(0,1)$이 이동되는 점은 $(2p,1)$꼴이며 이 점과 $P_1=(0,0)$를 지나는 직선의 기울기 $m=\dfrac{1}{2p}$이다. 자연수 $2p,1$이 서로소이므로 $\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{2p}<1$을 만족하는 모든 자연수 p에 대하여 성립한다. $\dfrac{1}{2}<p<10$이므로 구하는 값은

$$\sum_{p=1}^{9}\left(\frac{1}{2p}\right)^{-1}=2\sum_{p=1}^{9}p=2\cdot\frac{9(9+1)}{2}=90$$

이다.

(별해) 주어진 규칙(다)에 따라 점을 정하는 과정은 홀수 번째 점을 지나는 기울기 m인 직선과 정사각형의 변의 다른 교점으로 다음 순서인 짝수 번째 점을 정하고, 짝수 번째 점을 지나는 기울기 $-m$인 직선과 정사각형의 변의 다른 교점으로 다음 순서인 홀수 번째 점을 결정한다. 따라서 주어진 조건을 만족하려면 기울기 m과 기울기 $-m$을 번갈아 사용하고 짝수 번째 점들은 모두 선분 AB에 홀수 번째 점은 모두 선분 CO에 차례로 나타나야 한다. 따라서 선분 AB를 짝수 개의 같은 크기의 선분으로 분할할 때 얻는 점 중 x축에 가장 가까운 점이 기울기를 결정한다. 이들 점은 자연수 p에 대하여 점 $\left(1,\dfrac{1}{2p}\right)$꼴이며 대응하는 기울기는 $m=\dfrac{1}{2p}$이다. $\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{2p}<1$이므로 조건을 만족하는 자연수 p는 $\dfrac{1}{2}<p<10$이다. 따라서 구하는 값은

$$\sum_{p=1}^{9}\left(\frac{1}{2p}\right)^{-1}=2\sum_{p=1}^{9}p=2\cdot\frac{9(9+1)}{2}=90$$

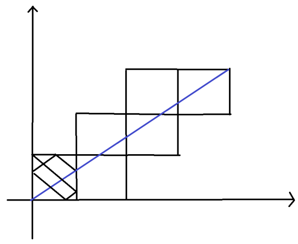
이다.

(3) 꼭짓점 $\mathrm{C}(0,1)$가 끝점 P_{15}이 되는 기울기 m을 모두 구하시오.

풀이: 끝점 P_{15}가 꼭짓점 $\mathrm{C}(0,1)$이 되기 위해서는 $\mathrm{P}_k\ (1 \le k \le 14)$은 모두 꼭짓점이 아닌 변 위에 존재하고 이 변들은 문항 (2)의 풀이와 같이 대칭에 활용된다. 꼭짓점 $\mathrm{C}(0,1)$을 대칭 이동하여 도달할 수 있는 점은 자연수 $p,q(p \ge q)$에 대하여 $(2p,2q-1)$의 꼴이며 $2p$와 $2q-1$이 서로소이다. 문항 (2)의 풀이와 주어진 정사각형을 오른쪽 또는 위로 대칭하여 $(2p,2q-1)$이 원점에서 가장 먼 점이 되려면 위로 $2p-1$번 대칭이동하고 오른쪽으로 $2q-2$번 대칭이동 해야 한다. 끝점 P_{15}가 꼭짓점 $\mathrm{C}(0,1)$이 되기 위해서는 총 13회 대칭 이동하여야 하므로 $\mathrm{C}(0,1)$에 대응하는 점 $(2p,2q-1)$에 대하여 $(2p-1)+(2q-2)=13$를 만족한다. 따라서 $p+q=8$이므로 조건을 만족하는 자연수 $p,q(p \ge q)$에 대응하는 점 $(2p,2q-1)$은

$$(14,1),(12,3),(10,5),(8,7)$$

이며 x좌표와 y좌표가 서로소인 것은 $(14,1),(8,7)$이므로 구하는 기울기는 $\frac{1}{14},\frac{7}{8}$이다.



[그림 3]

2026학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (인문계열 I)

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

이 화 여 자 대 학 교

1-3 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 20세기 독일 철학자 블루멘베르크는 은유에 대한 종래의 철학의 해석을 두 가지로 제시하며, 이로 인해 은유의 중요성이 간과되었다고 주장했다. 첫째는 수사적 기법으로서의 은유이다. 이러한 관점에서 은유는 명료한 사실에 대한 표현을 강조하기 위한 수단으로서 군더더기나 장식에 지나지 않는 것이다. 둘째는 명확한 개념적 인식에 이르지 못한 불완전한 인식과 추측의 표현으로서의 은유이다. 이때 은유는 개념이 형성되기 이전에 잠정적으로 사용되는 필요악 같은 것이며, 인간의 사유가 발달하여 어떤 대상을 가감 없이 표현할 수 있는 투명한 형식을 찾아내면 은유는 더 이상 필요하지 않게 된다. 이러한 관점에서는 궁극적으로 철학의 모든 은유가 순수하게 개념적인 용어로 대체되는 것이 바람직하다고 간주했다. 블루멘베르크는 전통 철학의 지적대로 은유가 수사적 표현이거나 아직 개념으로 환원되지 못한 잉여일 수 있다는 점을 인정하면서도, 은유 중에는 결코 개념으로 대체될 수 없는 고유한 형식으로서 철학적 언어의 근본 바탕이 되는 것이 존재한다고 주장하며 이를 '절대적 은유'라고 명명했다.

블루멘베르크에 따르면 절대적 은유는 개념적 사고에 미달하는 것이 아니라 오히려 개념적 사고의 바탕이 되며, 세계의 본질이나 삶의 지향성 등과 같이 개념으로 설명할 수 없는 궁극적인 질문들에 답하려는 시도이다. 그 질문들은 이성을 통해 인식 가능한 영역을 넘어서므로 규정적 해답을 구할 수 없는 것들인데, 절대적 은유는 현실의 총체성을 묘사하는 이미지를 생성하여 우리가 사는 세계를 표현한다. 예를 들어 미지의 세계를 찾아 출항하고, 망망대해에서 난파당하는 등 '항해'와 관련된 은유들은 세계 속에서 살아가는 인간의 실존을 표현하는 절대적 은유라 할 수 있다. 또한 절대적 은유는 인간이 세계를 대하는 기본자세와 태도를 표현하며 인간 행위의 방식을 설정하는 지침으로 기능한다. 블루멘베르크에 따르면, 인간이 개념으로 규정할 수 없는 궁극적 영역들이 있는데, 절대적 은유는 여기에 구조를 부여하여 세계에 대한 명백한 형상을 제공함으로써 인간이 세계와 조화로운 관계를 맺도록 돕는다고 보았다. 예를 들어 세계를 '시계'라는 은유로 나타낼 때 세계는 일정한 규칙에 따라 움직이는 하나의 시계, 즉 질서 있는 전체가 된다.

절대적 은유와 마찬가지로 신화 역시 개념으로는 해명할 수 없는 사태를 은유를 활용한 이야기로 서술한다는 점에서 블루멘베르크의 은유 이론은 신화 이론으로 연결된다. 그에 따르면, 신화의 기본적인 기능은 막연한 불안을 구체적 두려움으로 바꿈으로써 세계의 거친 폭력과 혼돈으로부터 자신의 안전을 도모하려는 것이다. 예를 들어 고대 그리스 문헌에서 신들은 만물을 질서에 따라 배치하는 권능을 가진 존재로 서술되어 있는데, 이런 이야기를 통해 인간은 이성으로 파악할 수 없는 섭리를 신들의 권능으로 여김으로써 자연이 일정한 질서에 따라 운행될 것이라는 믿음을 갖고 비로소 안도하게 된다. 이런 자기 보호 기능에서 더 나아가 신화는 다양하게 변주되어서 인간이 추구하는 가치를 함축하는 서사로 진화한다. 신화의 의미는 고정불변의 실체가 아니라 신화의 전승과 수용 과정에서 역사적 존재인 인간의 문화적 선택에 따라 의미의 선택과 변이가 일어나는 것이다.

[나] 세상은 동명왕(東明王)의 신통하고 이상한 일을 많이 말한다. 비록 어리석은 남녀들까지도 흔히 그 일을 말한다. 나는 일찍이 그 얘기를 듣고 웃으며 말하기를, "공자께서는 괴력난신(怪力亂神)을 말씀하지 않았다. 동명왕의 일은 실로 황당하고 기괴하여 우리들이 얘기할 것이 못된다." 하였다. 뒤에 『위서(魏書)』와 『통전(通典)』을 읽어 보니 역시 그 일을 실었으나 간략하고 자세하지 못하였으니, 국내의 것은 자세히 하고 외국의 것은 소략히 하려는 뜻인지도 모른다. 지난 계축년(1193, 명종 23) 4월에 『구삼국사(舊三國史)』를 얻어 「동명왕본기(東明王本紀)」를 보니 그 신이(神異)한 사적이 세상에서 얘기하는 것보다 더했다. 그러나 처음에는 믿지 못하고 귀(鬼)나 환(幻)으로만 생각하였는데, 세 번 반복하여 읽어서 점점 그 근원에 들어가니, 환(幻)이 아니고 성(聖)이며, 귀(鬼)가 아니고 신(神)이었다. 하물며 국사(國史)는 사실 그대로 쓴 글이니 어찌 허탄한 것을 전하였으랴. ㉠<u>김부식(金富軾)</u> 공이 국사를 다시 편찬할 때에 자못 그 일을 생략하였으니, 공은 국사는 세상을 바로잡는 글이니 크게 이상한 일은 후세에 보일 것이 아니라고 생각하여 생략한 것이 아닌가? (중략) 동명왕의 일은 변화의 신이(神異)한 것으로 여러 사람의 눈을 현혹한 것이 아니고 실로 나라를 창시(創始)한 신기한 사적이니 이것을 기술하지 않으면 후인들이 장차 어떻게 볼 것인가? 그러므로 ㉡<u>나</u>는 시를 지어 기록하여 우리나라가 본래 성인(聖人)의 나라라는 것을 천하에 알리고자 하는 것이다.

[다] A good way to make human-machine interaction more natural would be to develop a better metaphor. A computer metaphor is a familiar object or activity that your computer imitates with its commands, display arrangements, and behavior. The two main metaphors we have today are the desktop and the browser. In the desktop metaphor, the display screen mimics a typical desk; information is kept inside folders, which can be opened, closed, and slipped into other folders. With Web browsing, the metaphor is downtown window shopping; you gaze at various "storefronts," see one you like, and (click) you enter. Inside, there are more options to browse, you choose another, and again you enter. The power of a good computer metaphor is that it makes a new system you don't know behave like an old "system" with which you are familiar. This lets you use the new system and get useful results out of it easily, since you don't have to struggle learning new concepts and commands.

[라] 조선 후기에 이르러 자연학에 대한 관심이 높아졌는데, 이러한 관심은 서양의 근대 과학적 성과를 수용한 결과이다. 자연학을 중시하는 입장에서 우리의 인식 대상은 자연의 구체적인 성질로서의 '이(理)'이다. 이러한 '이'는 마음 안에 있지 않고 사물에 있기 때문에 참된 인식을 위해서는 자연에 대한 직접적인 탐구가 필요하다. 최한기에 따르면 인간의 마음은 아무런 색이 없는 우물물 같아서 본래 그 어떤 관념이나 선험적인 '이'가 내재해 있지 않은 것이다. 그는 온갖 이치가 마음속에 갖추어져 있다는 맹자와 주희의 언급은 마음이 지닌 사유 작용을 찬미한 것이지 '이'가 본래 마음에 갖추어져 있음을 의미하지 않는다고 보았다. 이는 사물에 대한 객관적인 탐구를 중시하는 입장이다. 최한기의 철학에서 근본적인 문제는 마음속에 있는 도덕적 본체를 어떻게 실현할 것인가에 있었던 것이 아니라 어떻게 하면 객관 세계의 이치를 정확하게 인식할 것인가 하는 데 있었다. 그래서 그에게 참된 인식을 위한 격물치지는 감각 기관을 매개로 객관 세계를 정확하게 인식함으로써 객관 세계의 '이'에 이르는 것이다. 이와 같은 최한기의 격물치지설은 도덕학의 테두리에 갇혀 있던 자연을 자연학으로 독립시키는 데에 중요한 역할을 했다.

[마] 아리스토텔레스 이후 서양에서는 색이 물체의 고유한 성질에 해당한다고 보았다. 빨간 사과가 빨갛게 보이는 것은 그 사과가 빨간색이라는 고유한 성질을 가지고 있기 때문이라는 것이다. 뉴턴은 광학 이론을 제시하여 이러한 생각을 뒤바꿔 놓았다. 그에 따르면 물체의 색은 물체가 아니라 빛의 특성에 의한 것이며, 특정 물체는 모든 색을 포함하고 있는 빛 중에서 특정한 파장의 빛만을 반사하거나 투과하기 때문에 사람이 그 물체를 볼 때 특정한 색을 느끼게 된다는 것이다.

색채 현상은 객관적 실체에 해당하는 것이기 때문에 인간은 색채 현상에 아무런 영향을 주지 못한다고 본 뉴턴과 달리, 괴테는 색채 현상이 인간의 감각과 무관한 것이 아니며, 인간 내면의 세계와 자연은 감각을 매개로 서로 연결되어 있다고 보았다. 괴테는 인간의 눈 속에 일종의 빛이 들어 있어서, 내부 혹은 외부로부터 미세한 자극이 주어지면 색채가 촉발된다고 보았다. 그는 선명한 유색(有色)의 종이를 적당한 밝기의 흰색 판지 앞으로 갖다 대었을 때의 사례를 제시한다. 유색의 표면을 어느 정도 응시한 후 눈을 움직이지 않고 그 유색 종이를 치우면 바로 그 자리에 다양한 색의 스펙트럼이 생겨난다. 유색 종이가 황색이었다면 청자색이, 주황색이었다면 청색이, 자색이었다면 녹색이 나타난다. 이때 앞의 색을 유도색이라 하고 뒤의 색을 피유도색이라고 한다. 눈은 어둠이 제공되면 밝음을 요구하고, 반대로 밝음이 제공되면 어둠을 요구한다. 이처럼 눈은 한순간이라도 물체에 의해 규정되는 특정 상태에 머물지 않고 주어진 유도색과 대립되는 피유도색을 만들어 낸다.

괴테는 감각을 매개로 하여 인간의 내부와 자연은 서로 분리 불가능하게 연결되어 있다는 확신을 가지고 있었다. 아울러 그는 적색은 정열과 흥분, 청색은 수축과 차분함 등 각각의 색에는 상징적 의미가 있고, 따라서 색은 감각적이고 도덕적이며 미학적인 목적으로 사용될 수 있다고 생각하였다. 그래서 사람들은 자색(紫色)을 위엄을 나타내는 색으로 보고, 녹색에 희망이라는 의미를 부여하기도 한다는 것이다. 이렇게 괴테는 뉴턴이 간과하였던 심리적, 철학적, 미학적 관점에서 색채 현상을 설명하였다.

[바] 장소에 관한 철학을 대표하는 현대 철학자 미셸 푸코는 유토피아의 개념과 대별되는 개념으로 '헤테로토피아'를 제시하였다. 그는 "우리는 순백의 중립적인 공간 안에서 살지 않는다."라고 하였는데 여기서 순백의 중립적인 공간은 유토피아를 가리킨다. 푸코에게 유토피아란 현실에서 실재적인 장소를 점유하지 않고 있는, 비현실적이며 균질적인 공간이다. 반면 헤테로토피아는 현실에 실재하지만 우리가 사는 현실과는 이질적인 공간이다. 이러한 공간의 예로 푸코는 원시 사회에서 신성시된 장소, 아이들이 다락방 가운데 자신만이 출입할 수 있도록 만들어 놓은 텐트 등을 들면서, 현대 사회에서는 누군가에게 정신 병원, 감옥 등도 일탈을 위한 헤테로토피아가 될 수 있다고 하였다. 이러한 공간은 기존의 권력 체계에서 벗어나 있고 그것에 반하는 질서를 갖고 있는 '반(反)공간'이다. 그렇기 때문에 헤테로토피아는 낯설고 위험한 곳처럼 보이기도 하고 누군가에는 위안을 주고 해방을 실현하는 공간이 되기도 한다.

푸코는 헤테로토피아가 현실에 대한 이의 제기를 수행하는 일종의 대항 공간, 현실 전복의 공간이 된다고도 하였다. 푸코에 따르면 헤테로토피아에서 사람들은 새로운 세상의 질서를 만들고자 하고 현실 전복을 시도한다. 또한 푸코는 헤테로토피아를 구성하지 않는 사회는 없다고 강조하면서 그 공간은 현실에서 다수를 위해 만들어진 공간과 차별화된다고 강조하였다.

푸코는 헤테로토피아를 '바깥의 공간'이라는 말로도 설명하였다. 푸코에 따르면 우리들의 삶의 공간은 조합을 통해 배치되는데 이때의 조합은 기존의 질서나 구조, 권력 안에서 이루어진다. 바깥의 공간은 기존 질서에 의한 공간과 관계를 맺고 있지만 기존 질서를 전복하는 양태를 띤다. 푸코는 기존 질서에 입각하여 배치된 공간이지만 현실 어디에도 없는 곳이 유토피아이고, 기존 질서를 전복하는 방식으로 배치된 공간, 기존 질서와 대립적 관계를 맺고 현실 어딘가에 있는 곳이 바로 헤테로토피아라고 하였다. 이에 대해 푸코는 유토피아와 헤테로토피아란 각각 현실에 대한 감응과 반감의 상상력에 의해 끊임없이 재구성되는 장소라고 표현하기도 하였다. 푸코의 헤테로토피아라는 개념은 현대 예술가들의 작품을 해석할 때도 적용되는데, 화폭을 현실 대항과 현실 전복의 상상력을 발휘하는 수단, 우리의 현실과는 다른 새로운 가능성을 찾을 수 있는 바깥의 공간으로 다루는 현대 예술가들의 철학적 바탕이 바로 푸코에게 있다.

[사] 문득 피아노를 치고 싶은 마음이 들었다. 이사 후 처음 있는 일이었다. 그리고 일단 그런 마음이 들자, 주체할 수 없는 감정이 솟구쳤다. 한 음 정도는 괜찮지 않을까. 소리는 금방 사라져 아무도 모를 것이다. 나는 용기 내어 손가락에 힘을 주었다.

"도—" 도는 방안에 갇힌 나방처럼 긴 선을 그리며 오래오래 날아다녔다. 나는 그 소리가 아름답다고 생각했다. 가슴속 어떤 것이 엷게 출렁여 사그라지는 기분이었다. 도는 생각보다 오래 도— 하고 울었다. 나는 한 음이 완전하게 사라지는 느낌을 즐기려 눈을 감았다. 밖에서 문 두드리는 소리가 났다. 쿵쿵쿵쿵. 주먹으로 네 번이었다. 나는 얼른 피아노 뚜껑을 덮었다. 다시 쿵쿵 소리가 들렸다. 현관문을 열어보니 주인집 식구들이었다. (중략)

"학생, 혹시 좀 전에 피아노 쳤어?" 나는 천진하게 말했다. "아닌데요."

주인 남자는 고개를 갸웃거리며 물었다. "친 거 같은데……?" 나는 다시 아니라고 했다. 주인 남자는 의심스러운 표정을 짓다가, 내가 곰팡이 얘길 꺼내자 "지하는 원래 그렇다"고 말한 뒤, 서둘러 2층으로 올라갔다. (중략)

저녁부터 폭우가 내렸다. 언니는 아르바이트 때문에 늦는다고 했다. (중략) 나는 만두라면을 먹으며 연속극을 보고 있었다. 볼륨을 한껏 높였는데도 배우들의 목소리가 잘 들리지 않았다. 리모컨을 잡으니 뭔가 축축한 게 만져졌다. 한참 손바닥을 들여다 본 후에야 그것이 빗물이란 걸 깨달았다. 나는 화들짝 자리에서 일어났다. 현관에서부터 물이 새고 있었다. 이물질이 잔뜩 섞인 새까만 빗물이었다. 그것은 벽지를 더럽히며 창틀 아래로 흘러내렸다. 벽면은 검은 눈물을 뚝뚝 흘리는 누군가의 얼굴 같았다. (중략)

"언니야?"

웬 그림자 하나가 스윽— 나타났다. 무서운 얼굴을 한 사내였다. 나는 뒤로 자빠지며 엉덩방아를 찧었다. 손등 위로 출렁 빗물이 느껴졌다. 사내는 초점 없는 눈으로 나를 바라봤다. 나는 후들후들 떨며 "누구세요?" 라고 말했다. (중략) 사내는 나를 노려보다 신발장 옆으로 고꾸라졌다. 그러더니 신발장에 볼을 비비며 중얼거렸다.

"미영아......." 언니의 이름이었다. 나는 그가 언니의 예전 애인이라는 걸 알아챘다. 그는 조그마한 체구에 순한 얼굴을 가지고 있었다. 자세히 보면 조금 귀염성 있는 얼굴이기도 했다. 나는 조심스럽게 사내에게 다가갔다. (중략)

"아저씨!" 사내는 고꾸라진 뒤, 차가움에 놀라 부르르 떨다 다시 코를 골았다.

"저기요!" 그는 '음냐' 하고 몸을 뒤척였다. 성질이 났지만 그대로 둘 순 없었다. 물은 정강이까지 올라와 있었다. 책장 아래 칸의 책들은 빗물에 퉁퉁 불어가고 있었다. 그중에는 언니가 아직 풀지 못한 영어 문제집도 있었다. 나는 가까스로 사내를 옮겨 피아노 의자 위에 누일 수 있었다. 사내는 평온한 표정을 지었다. 몸통이 기역 자로 꺾여, 발목은 물에 잠긴 채였다. (중략) 빗물은 어느새 무릎까지 차 있었다. 나는 피아노가 물에 잠겨 가고 있다는 걸 깨달았다. 저대로 두다간 못 쓰게 될 게 분명했다. 순간 '쇼바'를 잔뜩 올린 오토바이 한 대가 부르릉— 가슴을 긁고 가는 기분이 들었다. 오토바이가 일으키는 흙먼지 사이로 수천 개의 만두가 공기 방울처럼 떠올랐다 사라졌다. 언니의 영어 교재도, 컴퓨터와 활자 디귿도, 아버지의 전화도, 우리의 여름도 모두 하늘 위로 떠올랐다 톡톡 터져버렸다. 나는 피아노 뚜껑을 열었다. 깨끗한 건반이 한눈에 들어왔다. 건반 위에 가만히 손가락을 얹어보았다. 엄지는 도, 검지는 레, 중지와 약지는 미 파. 아무 힘도 주지 않았는데 어떤 음 하나가 긴소리로 우는 느낌이 들었다. 나는 나도 모르게 손가락에 힘을 주었다.

"도—" 도는 긴 소리를 내며 방 안을 날아다녔다. 나는 레를 짚었다. "레—"

사내가 자세를 틀어 기역 자로 눕는 모습이 보였다. 나는 편안하게 피아노를 연주하기 시작했다. 하나둘 손끝에서 돋아나는 음표들이 눅눅했다. "솔 미 도레 미파솔라솔……" 물에 잠긴 페달에 뭉텅뭉텅 공기 방울이 새어 나왔다. 음은 천천히 날아올라 어우러졌다 사라졌다. "미미 솔 도라 솔……"

사내의 몸에서 만두처럼 김이 모락모락 피어났다. 빗줄기는 거세졌다 잦아지길 반복하고, 검은 비가 출렁이는 반지하에서 나는 피아노를 치고, 발목이 물에 잠긴 채 그는 어떤 꿈을 꾸는지 웃고 있었다.

1 ⑴ 제시문 [가]를 활용하여, 제시문 [나]의 '동명왕의 일'에 대한 '㉠김부식'과 '㉡나'의 관점을 대비하시오. [20점]

⑵ 제시문 [다]를 한국어로 요약하고, 제시문 [가]의 '절대적 은유'와 제시문 [다]의 'metaphor'를 비교하시오. [20점]

2 제시문 [마]의 괴테의 관점에서 제시문 [라]의 최한기의 견해를 비판하시오. [30점]

3 제시문 [바]의 '헤테로토피아' 개념을 활용하여, 제시문 [사]의 '반지하' 방의 의미에 대해 서술하시오. [30점]

2026학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (인문계열Ⅱ)

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

이 화 여 자 대 학 교

1-2 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 서양에서는 공적 영역과 사적 영역의 구분에 대한 논의가 오랫동안 이어져 왔다. 이와 관련해 발언한 대표적 인물로 고대 그리스의 페리클레스가 있다. 일찍이 그는 아테네 시민들 중 공적인 일에 참여하지 않는 인간은 해를 끼치지 않고 조용히 사는 사람이 아니라 쓸모없는 인간으로 간주한다고 선언했다. 이 선언에는 공적 영역은 인간적 가치가 실현되는 곳이고 사적 영역은 그러한 가치가 결여된 곳이라는 의미가 담겨 있다. 아리스토텔레스 또한 인간의 활동 영역을 공적 영역인 '폴리스'와 사적 영역인 '가족'으로 구분하였다. 전자는 시민들이 공동선을 추구하면서 인간의 목적을 실현해 가는 본질적인 장인 데 반해, 후자는 개인들이 단순히 먹고사는 것을 해결하기 위한 수단의 장이다. 전자가 동등한 사람들 사이의 자유의 장이라면, 후자는 가장을 정점으로 하는 지배와 종속의 장이다. 아리스토텔레스는 폴리스가 가족보다 우선한다고 보았다. 그의 이러한 주장의 밑바탕에는 폴리스가 인공적으로 만들어진 것이 아니라 인간의 본성에서 나온 자연적인 것이라는 전제가 깔려 있다. 아리스토텔레스의 관점에서 자유는 폴리스의 공동선을 추구하는 데에 적합한 방식으로 시민 개개인이 가진 탁월성을 가장 잘 발현하는 것이다.

[나] 근대에도 공적 영역의 우위를 주장하는 목소리는 이어졌지만, 자본주의가 발달하면서 사적 영역이 공적 영역에 승리했다고 볼 만한 것들이 나타났다. 자본주의를 이끌어 가는 부르주아들은 개인적 삶과 감정, 그리고 주관적인 것에 몰입하면서 사적인 것을 우위에 두었다. 이를 사상적으로 뒷받침한 것이 자유주의이며, 사적 이익 추구를 통한 재산 소유 행위를 정당화하는 소유적 개인주의가 바로 자유주의의 핵심 내용이다.

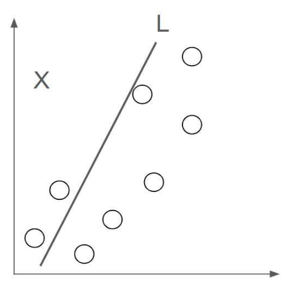
자유주의 입장에서 공적 영역과 사적 영역의 구분에 관한 논의를 본격적으로 시작한 인물로 자유주의의 이론적 기초를 세운 존 로크를 들 수 있다. 로크는 모든 인간이 자유롭고 평등한 자연 상태를 원초적 상태로 설정하고, 이에 기초하여 사적인 것이 공적인 것에 대해 도덕적으로나 정치적으로나 우위에 있으며 공적 영역이라는 것도 단지 사적 개인들이 원할 때만 구성될 수 있다고 보았다. 로크는 자연권을 소유한 개인들이 자기 소유권과 자기 결정권을 행사하면서 자신의 행복과 안전을 추구하는 장이 사적 영역이라면, 공적 영역은 그것을 더 안전하게 보장받기 위해 개인들이 동의를 통해 인위적으로 구성한 장일 뿐이라고 주장한다. 따라서 사적 영역은 공적 영역의 토대가 되며, 공적 영역의 기능은 개인들의 행복과 안전을 위한 것으로 제한된다.

자유주의는 정치나 사회로부터 분리되고 보호받아야 하는 삶의 어떤 영역이 존재한다는 관념을 만들어 내고, 그 영역을 정치나 사회와 같은 공적 세계의 반대편에 놓으려고 한다. 존 스튜어트 밀 역시 이러한 관점에서 사적인 행위는 오직 그 당사자에게만 영향을 주는 행위인 반면 공적인 행위는 다른 사람들에게도 영향을 주는 행위라고 규정한다. 사적인 행위의 주체인 개인은 자신의 몸이나 정신에 대해서 완전한 주권자로서 자유를 누려야 하는 존재이고, 사회는 개인의 자유를 억압하는 제도를 총괄하는 개념으로, 오직 다른 사람에게 영향을 주는 행위에 한해서만 개인의 자유를 간섭할 수 있다. 하지만 예외도 있다. 밀은 개인이 더 높은 능력들을 개발하기 위해서 국가의 개입이 필요하다고 보았다. 밀의 자유주의는 합리적 개인을 전제하고 있는데, 합리적 개인이 되기 위한 교육은 필수적이며 이러한 역할에 한정하여 국가의 개입을 정당화하였다.

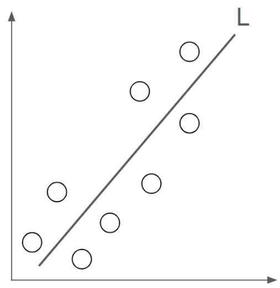
[다] 진정한 자유는 다른 개인들이나 기관들로부터 간섭을 받지 않는 것으로 그치는 것이 아니라 주종적 지배 자체가 존재하지 않는 상태를 의미한다. 여기서 어떤 사람이 주종적 지배와 예속 관계로부터 자유롭다는 것은 법의 제재를 두려워함이 없이 언제라도 남을 마음대로 억압할 수 있는 특정 개인이나 기관들의 자의적 의지에 종속되어 있지 않음을 의미한다. 즉, 시민들이 법을 전혀 두려워하지 않는 독재자나 과두지배계급에 의해 핍박받을 수 있는 경우, 여성이 자신의 남편으로부터 학대를 당할 수 있거나 사후적으로도 법의 보호를 받을 수 없는 경우, 근로자들이 고용주나 감독자의 크고 작은 횡포 아래 놓일 수 있는 경우, 퇴직자가 자신이 당연히 받을 권리가 있는 연금을 수령함에 있어서 담당 공무원의 변덕에 좌우될 수 있는 경우, 환자가 건강을 되찾는 것이 의사의 호의에 달린 경우, 젊은 학자들의 직업적 미래가 연구성과의 질이 아니라 선배 학자의 변덕에 좌우될 수 있는 경우, 시민이 검사의 자의적인 말 한마디에 의해 언제라도 감옥에 수감될 수 있는 경우 등 이 모든 경우에서 간섭은 보이지 않는다. 즉 내가 이야기한 것은 실제 압제를 행하고 있는 독재자나 과두지배계급이 아니라 원하기만 한다면 언제라도 압제를 행할 수 있는 독재자나 과두지배계급에 대해서이다. 또한 나는 자신의 아내를 학대하고 있는 남편에 대해 이야기한 것이 아니라, 원하면 언제라도 학대할 수 있는 남편에 대해 이야기한 것이다. (중략) 따라서 위의 예와 같이 예속 상태에 있는 사람들은 우리가 자유를 간섭으로부터의 자유로 이해하는 경우, 한마디로 100퍼센트의 자유를 누리고 있다고 할 수 있다. 하지만 이들은 타인들의 자의에 노출되어 있고, 따라서 플라우투스(Plautus)가 자신의 희극에서 묘사한 노예들의 삶과 같은 그런 예속 상태에서 살아가고 있다.

[라] 데이터를 처리할 때 데이터의 정확성은 매우 중요하다. 그런데 데이터에 이상치가 포함되면 데이터의 특징을 제대로 나타내기 어렵다. 이상치는 데이터의 다른 값에 비해 유달리 크거나 작은 값으로, 데이터를 수집할 때의 측정 오류 등에 의해 주로 생긴다. 그러나 정상적으로 수집된 데이터라 하더라도, 전체적인 경향에서 벗어나 데이터의 특징을 왜곡하는 경우 이상치로 간주할 수 있다. 예를 들어, 공부 시간과 성적의 관계를 분석하기 위해 한 학급의 학생들이 기록한 성적과 공부 시간을 2차원 평면 위의 점으로 나타낸다고 가정하자. 대부분의 점들이 어떤 가상의 직선 주위에 밀집되어 있다면, 이 직선은 공부 시간과 성적 간의 일반적인 경향을 보여 주는 ㉠선형 회귀선이라고 볼 수 있다. 이 직선을 회귀선 **L**이라고 하자. 회귀선 **L**은 일반적으로 최소제곱법(least squares method)을 사용하여 추정한다. 최소제곱법이란 각 데이터 점에서 직선 **L**까지의 수직 거리, 즉 잔차(residual)를 계산하고, 이 잔차들을 제곱한 후 모두 더한 값(잔차 제곱합, sum of squared residuals)을 최소화하는 방향으로 직선을 구하는 방식이다. 다시 말해, 회귀선은 전체 데이터에 대해 오차가 가장 작아지도록 정해진다. <그림 1>은 이상치 **X**가 포함된 데이터를 바탕으로 설정된 회귀선을 보여주고 있으며, <그림 2>는 이상치를 사전에 제거한 데이터를 바탕으로 구한 회귀선을 보여준다. 두 그림에서 회귀선의 절편과 기울기가 다른 것을 확인할 수 있다.

<그림 1>



<그림 2>

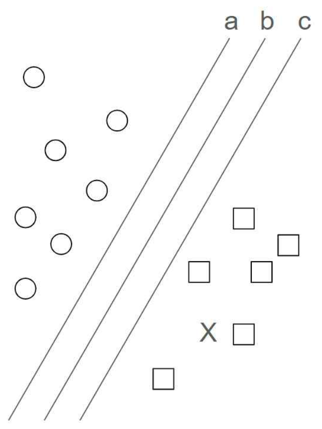


[마] 서포트 벡터 머신(support vector machine, SVM)은 머신 러닝 분야 중 하나로, n개의 속성을 갖는 개체들을 유사성에 근거하여 두 부류로 나누는 이진 분류 문제가 있을 때 효과적으로 사용된다. 이 경우 개체들은 n차원 공간에서 n개의 성분으로 지정되는 고유한 위치를 점유하게 되며, 이러한 개체들을 두 가지로 분류하기 위한 경계를 설정할 방안이 필요하다.

예를 들어, 두 종(種)의 개 300마리를 두 가지 속성(기록 x, 몸무게 y)으로 측정해 학습 데이터세트로 주고, 개들을 두 종으로 분류하게 하고자 한다. 이때 각 개는 2차원 평면에서 $(x,\ y)$ 두 성분을 갖는 점으로 표현된다. SVM은 그 평면 위에 직선을 하나 그어 300개의 점을 두 부류로 나누는데, 이렇게 2차원에서 SVM은 개체들을 두 부류로 구분하기 위한 '적절한' 직선을 찾는 일을 한다. 만약 고려할 속성이 세 개라면, SVM은 개체들을 두 부류로 구분하기 위해 적절한 평면을 찾을 것이다.

2차원에서 SVM은 어떤 기준으로 '적절한' 구분선을 찾을까? 예를 들어 <그림 3>에서 원과 사각형을 구분하는 세 개의 직선 **a, b, c**가 있다고 하자. 이 가운데 **b**가 가장 적절하다고 말할 수 있는데, 그 이유는 이 직선이 나머지 두 직선보다 마진(margin)이 가장 크기 때문이다. 여기서 마진이란 구분선과 가장 가까운 데이터 사이의 수직 거리를 의미한다. 따라서 마진이 최대인 구분선을 ㉡'결정 경계'라고 한다. 그러나 어떤 경우에는 이상치가 결정 경계를 찾지 못하게 만들 수 있다. 이상치란 관측된 데이터 범위에서 많이 벗어나 특이한 특성을 갖는 데이터 값을 말한다. <그림 3>에서 **X** 지점에 원이 있다면, 어떤 직선을 그어도 원과 사각형을 완전히 구분할 수 없게 된다. SVM은 이상치(또는 선형 분리가 어려운 상황)를 고려해 일부 오차를 허용하면서 결정 경계를 찾는다. 데이터 분포가 복잡할 때는 저차원 문제를 고차원으로 사상(射像)하여 결정 경계를 찾을 수도 있는데, 이러한 방법을 '커널 트릭(kernel trick)'이라 한다.

<그림 3>



1 (1) 제시문 [가]와 제시문 [나]에 나타난 ‘공적 영역’에 대한 관점을 대비하시오. [20점]

(2) 제시문 [나]와 제시문 [다]에 나타난 ‘자유’의 개념을 비교하시오. [20점]

2 (1) 제시문 [라]의 ㉠과 제시문 [마]의 ㉡의 목적의 차이를 설명하시오. [15점]

(2) 제시문 [라]와 제시문 [마]에 나타난 ‘이상치’가 결과에 미치는 영향을 비교하시오. [15점]

3 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. [30점]

[I] 우리는 예상치 못한 사고로 인해 신체적 또는 경제적 손실을 입을 위험에 항상 노출되어 있다. 보험은 이러한 사고에 대비해 보험료를 보험회사에 납부하고, 사고가 발생했을 때 약속된 보험금을 받는 금융 상품이다. 예를 들어 손해보험은 화재나 자동차 사고 등으로 인해 자신의 재산에 손실이 발생하거나 타인에게 배상해야 하는 상황에 대비하기 위해 만들어진 보험이다. 보험회사는 여러 사람에게서 보험료를 받아 두었다가 사고를 당한 사람에게 실제로 발생한 손해 금액을 보험금으로 지급한다. 이때, 순보험료는 손실의 기댓값*으로 산정된다.

[II] 사람들은 거주할 집을 소유하거나, 음식을 먹고 예쁜 옷을 사 입는 등의 소비를 통해 만족감을 얻는다. 이처럼 개인이 재산을 소유하거나 상품을 소비함으로써 얻는 만족감을 효용이라고 한다. 개인의 합리적인 선택을 분석하기 위해, 부의 소유나 소비로부터 발생하는 효용을 하나의 숫자에 대응시키는 함수를 효용함수라고 한다. 불확실성이 존재하는 상황에서 합리적인 개인은 효용의 기댓값*을 극대화하는 방향으로 의사결정을 내린다.

* 기댓값: 변수의 가능한 결과값에 각 결과가 발생할 확률을 곱한 뒤, 그 값들을 모두 더한 값.

A씨의 재산은 9,000,000원이다. 화재가 발생할 경우의 손실액은 8,000,000원이고 화재가 발생할 확률은 $\frac{5}{8}$이다. A씨의 효용함수는 $U=\sqrt{W}$이다. (단, U는 효용이고 W는 재산의 가치를 의미한다.)

(1) 제시문 [I]을 참조하여 A씨의 순보험료를 계산하시오. [5점]

(2) 제시문 [II]를 참조하여 A씨가 손해보험에 가입하지 않았을 때의 효용의 기댓값을 계산하시오. [10점]

(3) A씨가 손해보험에 가입했을 때의 효용의 기댓값을 계산하고, A씨가 손해보험에 가입하는 것이 유리한지를 판단하여 설명하시오. [15점]

2026학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (자연계열Ⅰ)

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

이 화 여 자 대 학 교

1 두 양수 a_1, a_2에 대하여, 부등식 $a_1a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이 성립하는 것이 알려져 있다. 또한 등식 $a_1a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = a_2$인 것도 알려져 있다. 이 사실들을 이용하여 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$a_1a_2a_3a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$$

(2) 네 양수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, 등식 $a_1a_2a_3a_4 = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$임을 보이시오.

(3) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+ \cdots +a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립한다고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여 다음 두 부등식이 각각 성립함을 보이시오.

$$a_1a_2 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1}a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}} \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k},$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \le \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

(4) 자연수 k와 2^k개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}$ 에 대하여 부등식

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{2^k} \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+ \cdots +a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

이 성립한다고 가정하고, 등식

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{2^k} = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+ \cdots +a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

가 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k}$라고 가정할 때, 2^{k+1}개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \cdots, a_{2^{k+1}}$에 대하여

$$a_1 \cdots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}} = \left(\frac{a_1+ \cdots +a_{2^k}+a_{2^k+1}+ \cdots +a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

이 성립하기 위한 필요충분조건이 $a_1 = \cdots = a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}}$임을 보이시오.

2 $a > 0$, $b > 0$ 이고 $a < b$일 때, 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad a_2 = \frac{2aa_1}{a+a_1},\quad a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2},\quad a_{2n+2} = \frac{2a_{2n}a_{2n+1}}{a_{2n}+a_{2n+1}}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a < a_n < b$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n} < a_{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n-1} > a_{2n+1}$이 성립함을 보이시오.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{2n} < a_{2n+2}$이 성립함을 보이시오.

3

다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(2\cos t, \sin t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}'(\sqrt{3}, 0)$에서 점 P까지 거리의 합이 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

(2) 임의의 실수 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$에 대해 좌표평면의 점 $\mathrm{Q}(3\sec t, 2\tan t)$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{F}(-\sqrt{13}, 0)$, $\mathrm{F}'(\sqrt{13}, 0)$에서 점 Q까지 거리의 차가 일정한 이차곡선의 방정식을 구하시오.

(3) 2보다 큰 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\mathrm{P}_n\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(3\sec\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 2\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $\frac{5}{4}B_n$이라 할 때, B_n을 구하시오.

(4) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 2보다 큰 자연수 n에 대하여

$$C_n = \int_0^1 \frac{B_n}{\cos(g(B_n x))}\, dx$$

로 정의할 때, 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} C_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

2026학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (자연계열Ⅱ)

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

이 화 여 자 대 학 교

1 모든 자연수 n에 대하여 수열 S_n을 다음과 같이 정의할 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(2\sin^4 x + 2\cos^4 x)^n}\,dx$$

(1) 다음 두 등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 4\sin x \cos x,\ \ \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x)$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} S_n + \frac{1}{2^{n+2} n}$$

이 성립함을 보이시오.

(3) 모든 자연수 m에 대하여 수열 A_m을 $A_m = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \cdots \times \frac{2m}{2m-1}$이라 정의한다. 모든 자연수 m에 대하여 부등식 $\sqrt{2m+1} \le A_m \le 2\sqrt{m}$이 성립함을 보이시오.

(4) 임의의 실수 α에 대하여 $\alpha < \frac{1}{2}$이면 극한값 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{n^{\alpha}\sqrt{k}}{A_n}(A_k S_{k+1} - A_{k-1} S_k)$이 0임을 보이시오.

2 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

> (가) $-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여, $f(x)=|\cos \pi x|$이다.
> (나) 임의의 실수 x에 대해 $f(x)=f(-x)$이다.
> (다) 모든 자연수 n과 $n \le x < n+1$을 만족하는 실수 x에 대하여
> $$f(x)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(f\left(2^n(x-n)-\left[2^n(x-n)\right]\right)-1\right)$$
> 가 성립한다. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=1$임을 보이시오.

(2) 직선 $y=\dfrac{8}{9}$과 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수를 구하시오.

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

3 좌표평면 위의 네 점 O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 대하여 다음의 규칙에 따라 정사각형의 변 위의 점을 차례로 정할 때, 아래 물음에 답하시오. (단, 정사각형의 꼭짓점도 변 위의 점이다.) [30점]

(가) 원점 O를 첫 번째 점 P_1로 정하고 선분 AB의 한 점을 두 번째 점 P_2로 정한다. 이때 선분 P_1P_2를 포함하는 직선의 기울기를 $m\,(0 \le m \le 1)$이라 한다.
(나) 만약 $n\,(n>1)$번째 점 P_n이 정사각형의 꼭짓점이면 점 P_{n+1}을 새로 정하지 않고 점 P_n을 끝점이라 한다.
(다) 만약 $n\,(n>1)$번째 점 P_n이 끝점이 아니면 $(n+1)$번째 점 P_{n+1}을 선분 $P_{n-1}P_n$과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 선분 P_nP_{n+1}과 정사각형의 점 P_n을 포함하는 변이 이루는 각의 크기가 같도록 정한다. (단, 점 P_{n+1}과 점 P_{n-1}은 같지 않다.)

(1) 기울기 $m=\frac{2}{3}$에 대하여 위의 규칙에 따라 정해진 점들 $P_n\,(n=1,2,3,\cdots)$을 모두 구하시오.

(2) $\frac{1}{20}<m<1$인 기울기 m에 대하여 규칙에 따라 정해진 점들이 꼭짓점 C를 제외한 선분 BC위에 있지 않고 꼭짓점 C(0,1)이 끝점이 된다. 조건을 만족시키는 기울기 m에 대하여 $\frac{1}{m}$을 모두 더한 값을 구하시오.

(3) 꼭짓점 C(0,1)가 끝점 P_{15}이 되는 기울기 m을 모두 구하시오.