2025학년도 수시모집 논술전형

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

모집단위	학부·과	수험번호		성 명	

【 수험생 유의사항 】

1. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
2. 문제지와 답안지의 문제번호가 일치하는지 반드시 확인할 것(불일치 시 0점 처리).
3. 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 주요 요소임.

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(a,a,0)$, $\mathrm{C}\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}, a\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, a\right)$를 꼭짓점으로 하는 사면체가 있다. 이 사면체에서 두 평면 $z=0$과 $z=b$ 사이에 있는 부분의 부피를 구하여라. (단, $0 \le b \le a$이다.)

[예시답안] $z=t(0 \le t \le b)$인 평면과 사면체가 만나서 이루어지는 단면은 $z=0$인 꼭짓점과 $z=a$인 꼭짓점을 $t:(a-t)$로 내분하는 점들로 이루어져 있으며, 이 점들은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\frac{3t}{4}, \frac{t}{4}, t\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{t}{4}, \frac{3t}{4}, t\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{3t}{4}+a-t, \frac{t}{4}+a-t, t\right),\ \mathrm{S}\left(\frac{t}{4}+a-t, \frac{3t}{4}+a-t, t\right)$$

그리고 단면을 이루는 네 꼭짓점들의 z좌표가 서로 같으므로, z좌표 없이 평면 좌표의 값으로 이해할 수 있다.
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) \cdot (a-t, a-t) = 0$ 이므로 $\angle \mathrm{QPR} = \frac{\pi}{2}$이다. 마찬가지로 단면의 나머지 세 내각도 직각임을 보일 수 있고, 따라서 단면은 직사각형이다. 이 직사각형 변의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{RS}} = \sqrt{\left(-\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{t}{\sqrt{2}}$,
$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{QS}} = \sqrt{(a-t)^2+(a-t)^2} = \sqrt{2}(a-t)$ 이다. 따라서 높이 $z=t$에서 단면의 면적은 $t(a-t)$이다. 정적분의 원리에 의하여 원하는 부분의 부피는 다음과 같다.

$$\int_0^b t(a-t)\,dt = \frac{at^2}{2} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^b = \frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{3}$$

[문제 2] (95점)

시립이 집의 현관문에는 0에서 9까지의 숫자로 이루어진 비밀번호를 입력해야 잠금이 해제되는 잠금장치가 있다. 이 잠금장치는 단 하나의 비밀번호로 잠금이 해제되며, 비밀번호를 3번 연속으로 잘못 입력하면 경보음이 울린다. 시립이는 비밀번호는 잊어버렸으나, 비밀번호에 대한 다음의 단서를 기억한다.

1) 비밀번호는 n자리이다. (단, n은 3 이상인 고정된 자연수이다.)
2) 비밀번호에는 서로 다른 3개의 홀수가 쓰인다.
3) 비밀번호의 첫 번째 숫자는 1이다.

시립이는 이 단서를 활용하여 매번 다른 번호를 시도하여 잠금장치를 해제하려고 한다. 이때, 시립이가 잠금장치의 경보음이 울리기 전에 현관문을 열 확률을 구하여라.

[예시답안] 먼저 3가지 서로 다른 숫자 a, b, c로 이루어진 비밀번호의 경우의 수를 구해보자. 사건 A_i를 숫자 a, b, c 중 i개의 숫자가 사용된 경우라 정의하자. $n(A_1)$은 숫자 a, b, c 중 하나를 골라 중복을 허용하여 n번 나열하는 중복순열이므로

$$n(A_1) = {}_3C_1 \times 1^n = 3$$

이다. $n(A_2)$는 숫자 a, b, c 중 두 개를 고른 후, 중복을 허용하여 n번 나열하는 중복순열에서 숫자 하나만 n번 나열하는 경우를 제외하면 되므로

$$n(A_2) = {}_3C_2 \times \left(2^n - {}_2C_1 \times 1^n\right) = 3 \times (2^n - 2)$$

이다. $n(A_3)$은 숫자 a, b, c를 중복을 허용하여 n번 나열하는 중복순열에서 $n(A_1)$와 $n(A_2)$를 빼면 되므로

$$n(A_3) = 3^n - n(A_1) - n(A_2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$$

이다. 또한, 숫자 a, b, c의 가능한 조합의 경우의 수는 1을 포함한 세 개의 홀수를 고르는 경우의 수이므로 ${}_4C_2$이다. 그 중, 비밀번호의 첫 번째 숫자가 1이 되는 경우의 수는 전체의 $\frac{1}{3}$이다. 따라서, 조건을 만족하는 비밀번호의 경우의 수는

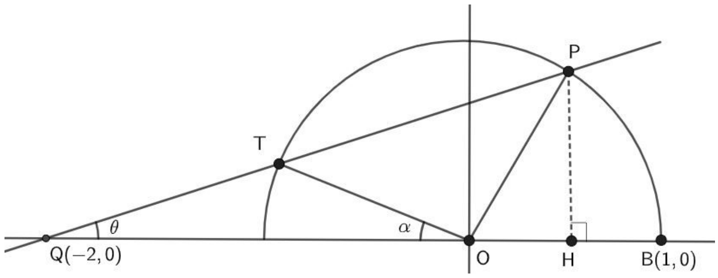
$$\frac{{}_4C_2 \times n(A_3)}{3} = 2 \times 3^n - 3 \times 2^{n+1} + 6$$

이다. 비밀번호의 경우의 수가 k이고 $k \geq 3$일 때 3번의 시도 이내에 비밀번호를 맞출 확률은 $\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k-1} + \frac{k-1}{k} \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k-2} = \frac{3}{k}$이므로, 구하는 확률은 $\frac{1}{2 \times 3^{n-1} - 2^{n+1} + 2}$이다.

[문제 3] (105점)

좌표평면에서 제1사분면에 있는 점 P가 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원 위에 있다. 이때, 점 Q의 좌표를 $(-2, 0)$이라 하고, $\angle PQB = \theta$라 하자. 선분 PQ와 선분 QB와 호 BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하여라.

[예시답안]



위 그림과 같이 선분 PQ가 주어진 원과 만나는 제2사분면 점을 T, $\angle TOQ = \alpha$라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그러면 $\angle PTO = \angle OPT = \theta + \alpha$이므로 $\angle POH = 2\theta + \alpha$이고, $\overline{PH} = \sin(2\theta + \alpha)$이다.

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \triangle PQO\text{의 넓이} + \text{부채꼴 OBP 의 넓이} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{QO} \times \overline{PH} + \frac{1}{2} \times \overline{OB}^2 \times \angle POB \\ &= \sin(2\theta + \alpha) + \theta + \frac{\alpha}{2} \\ &= \sin(2\theta)\cos\alpha + \cos(2\theta)\sin\alpha + \theta + \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

이다. $\triangle TQO$에 사인법칙을 적용하면 $\frac{\overline{QT}}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\theta}$을 얻으므로 $\sin\alpha = \overline{QT} \times \sin\theta$이다.

$$\frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\theta} \times \cos\alpha + \cos(2\theta) \times \frac{\sin\alpha}{\theta} + 1 + \frac{\alpha}{2\theta}$$

이고,

$$\frac{\sin\alpha}{\theta} = \frac{\overline{QT} \times \sin\theta}{\theta} = \overline{QT} \times \frac{\sin\theta}{\theta}, \qquad \frac{\alpha}{\theta} = \frac{\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{\sin\alpha}{\theta} = \frac{\alpha}{\sin\alpha} \times \overline{QT} \times \frac{\sin\theta}{\theta}$$

이다. 한편 $\theta \to 0+$이면, $\alpha \to 0+$이고 $\overline{QT} \to 1$이므로,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

이다.

[문제 4] (총 115점)
다음 물음에 답하여라.
(a) $x>0$일 때,

$$20(a-1)x-(4+a)+(4+a)\cos x>0$$

가 성립함을 보여라. (단, a는 2 이상의 자연수이다.) (25점)
(b) 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하여라. (90점)

두 함수 $y=-b\sin x$와 $y=10(a-1)x^2-(4+a)x$의 그래프의 교점의 개수는 1개이다.

[예시답안]
(a) $g(x)=20(a-1)x-(4+a)+(4+a)\cos x$라 하면, $\sin x\le 1$이며 a는 2 이상의 자연수이므로

$$g'(x)=20(a-1)-(4+a)\sin x\ge 20(a-1)-(4+a)\ge 19a-24\ge 14$$

이 성립한다. $g(0)=0$이므로, $x>0$일 때 $g(x)>0$이다.

(b) (i) $a=1$인 경우
사인함수의 개형을 활용하면,

$$x>0\text{일 때, } \sin x<x\text{이고 } x<0\text{일 때, } \sin x>x \ \cdots (1)$$

이 성립한다. 자연수 b가 5 이하일 때,

$$x>0\text{일 때, } -b\sin x>-bx\ge -5x$$

이고

$$x<0\text{일 때, } -b\sin x< -bx\le -5x$$

이므로, 두 함수 $y=-b\sin x$와 $y=-5x$의 그래프의 교점은 원점뿐이다. 따라서 자연수 b가 5 이하일 때 문제의 조건을 만족한다. 한편 자연수 b가 6 이상일 때, $y=-b\sin x$의 0에서의 기울기가 $-b$이므로 사인함수의 개형을 활용하면 교점이 세 개 이상임을 알 수 있다. 그러므로 조건을 만족하는 (a, b)는 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)$이다.

(ii) a가 2 이상의 자연수인 경우

$$f(x)=10(a-1)x^2-(4+a)x+b\sin x$$

라 정의하면 두 함수 $y=-b\sin x$와 $y=10(a-1)x^2-(4+a)x$의 그래프의 교점의 개수는 $f(x)=0$의 해의 개수와 같다. 한편, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ 이다. 그러므로 만약 $f(k)<0$인 k가 존재한다면 $f(x)$의 연속성에 의해 열린구간 $(-\infty, k)$와 (k,∞)에서 $f(x)=0$의 해가 각각 존재한다. 따라서 조건을 만족하는 $f(x)$는 항상 0보다 크거나 같다. $f(0)=0$이므로, $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 $f'(0)=0$이다. 이를 활용하면 $b=4+a$를 얻을 수 있고, 따라서

$$f(x)=10(a-1)x^2+(4+a)(\sin x-x)$$

이다. $x<0$일 때, (1)에 의해 $f(x)>0$이다. $x>0$일 때, 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

인 c가 0과 x 사이에 존재한다. (a)에 의해 $f'(c)=g(c)>0$이다. 그러므로 $x>0$이면 $f(x)>0$이다. 따라서 조건을 만족하는 (a,b)는 $(k,4+k)$이다. (단, k는 2이상의 자연수)

(i), (ii)에 의해 조건을 만족하는 (a,b)는 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(k,4+k)$이다. (단, k는 2이상의 자연수)