

1. 출제 의도

본 논술고사는 제시된 논제의 핵심을 정확하게 파악하는 능력과 주어진 제시문을 활용하여 논제를 심도 있게 분석하는 능력, 그리고 자료에 근거하여 자신의 주장을 논리적으로 전개하는 능력을 평가한다. 이는 제시된 글 자료의 요지를 파악하고 주어진 조건을 고려하여 논리적이고 체계적으로 글을 구성하는 역량과, 제시된 데이터 자료를 분석하여 자신의 주장을 논리적으로 정당화하는 역량을 필요로 한다. 또한 답안 작성 시 글 자료 해석과 데이터의 분석뿐 아니라 관련 현상에 대한 폭넓은 이해와 고등학교 교육과정에서 학습한 내용의 응용이 요구된다. 이러한 능력을 바탕으로 논리적이고 설득력 있는 글을 체계적으로 구성하는 것은 논술에서 요구되는 기본 활동이다.

논제는 기본소득(basic income) 제도의 도입 여부에 대한 찬반 입장 선택에 관한 것이다. 글 자료는 선택의 합리성을 정당화하거나 반박하도록 공유재에 대한 공동 권리, 무보수 노동에 대한 사회적 가치 인정과 보상, 소비 확대를 통한 유효수요 창출, 사회적 약자를 우선 고려하는 사회권, 노동에 의한 사적 재산권의 정당성, 근로의욕 약화로 인한 노동공급 감소와 관련된 지문을 제시함으로써, 수험생이 글 자료를 활용하여 자신의 선택을 정당화하거나 반론을 쓰는데 어려움이 없도록 하였다. 데이터 자료는 가상의 국가인 ‘갑(甲)국’에서 거론되고 있는 복지정책안을 정책 시행 5년 후의 성과를 기준으로 평가하도록 하였다. 이를 위해 세 종류의 데이터를 제시한 후 성과가 우수한 정책안을 선택하고, 자신의 주장을 정당화하는 데 활용할 수 있도록 하였다. 그리고 교육과정을 정상적으로 이수한 수험생이라면 누구든지 문제에 쉽게 접근할 수 있도록 『통합사회』, 『경제』, 『사회·문화』, 『정치와 법』, 『윤리와 사상』 등 교과서 내용과 관련된 자료를 제공하여 자신의 주장을 설득력 있게 전개하는 데 큰 어려움이 없도록 하였다.

2. 문항 해설

본 논술고사는 고등학교 교육과정에서 다루고 있고 사회적으로도 쟁점이 되는 주제를 중심으로 제시된 자료에 대한 분석 능력, 그리고 이를 활용하여 자신의 주장을 논리적으로 전개하는 능력을 평가하는 데 목적이 있다. 제시문에 활용된 주요 개념과 지식은 『통합사회』, 『경제』, 『사회·문화』, 『정치와 법』, 『윤리와 사상』 등 여러 고등학교 교과서에서 다루고 있는 것으로 수험생들에게 매우 익숙한 것을 취하였다. 문항은 제시된 글의 핵심을 정확하게 파악하여 자신의 주장을 논리적으로 전개하는 능력과, 데이터를 분석하여 대안을 선택하고 자신의 주장을 논리적으로 정당화하는 능력을 평가하는 두 문항으로 구성되었다.

[문항 1]은 제시문의 핵심 요지를 파악하여 자신의 주장과 예상되는 반론 및 재반박에 활용함으로써 논리적 사고 능력과 서술 능력을 평가하도록 구성되었다. 논제는 ‘기본소득 제도 도입을 찬성한다’와 ‘기본소득 제도 도입을 반대한다’는 두 주장 중 하나를 선택하여 자기의 주장을 정당화하는 것이다. 기본소득 제도 도입 찬성 논거를 위한 제시문으로 공유재에 대한 공동 권리[제시문 (가)], 무보수 노동에 대한 사회적 가치 인정과 보상[제시문 (나)], 소비 확대를 통한 유효수요 창출[제시문 (마)] 지문이 제시되었고, 기본소득 제도 도입을 반대한다는 주장을 정당화하기 위한 논거 제시문으로 사회적 약자를 우선 고려하는 사회권[제시문 (다)], 노동에 의한 사적 재산권의 정당성[제시문 (라)], 근로의욕 약화로 인한 노동공급 감소[제시문 (바)] 지문이 제시되었다.

[문항 2]는 제시문 (사)에서 제시된 표와 그림 자료에 대한 정확한 분석과 해석을 바탕으로 각 정책의 성과를 평가하고 자신의 주장을 논리적으로 설명하는 능력을 평가하도록 구성되었다. 논제는 가상의 국가인 갑(甲)국에서 거론되고 있는 복지정책안 4가지를 제시하고 표와 그림 자료를 활용하여 성과가 우수할 것으로 예상되는 안을 두 개 선택하고, 두 안 중 하나를

골라 [문항 1]에서 선택한 주장을 정당화하는 것이다.

제시문 (가)는 알래스카 주 의회에서 ‘알래스카 영구기금’을 설립하고 주민들에게 일률적인 배당금을 분배하는 사례를 통해 천연자원 등 공유재의 개발소득이 어떻게 분배되어야 하는지에 대해 사고하도록 하는 글 자료다. 제시문에서는 공유재는 구성원 모두가 권리가 있으며 그 개발소득도 적절히 분배되어야 한다고 주장한다. 또 이러한 공유재는 천연자원만이 아니라 사회가 집단으로 참여하는 인프라와 지식기반, 사회적 네트워크, 빅데이터, 인공지능 등도 포괄할 수 있다고 보고 있다. 나아가 제시문에서는 천연자원과 인공적인 공유재에 대해 구성원 모두가 직간접적으로 기여하는 만큼 공유재를 활용한 경제활동의 수익에 대해 일정한 권리가 있다고 주장한다. 따라서 이 제시문은 모든 사회 구성원에게 공유재 수익의 정당한 분배 방식으로써 기본소득 제도의 도입을 지지하는 근거로 사용할 수 있다.

제시문 (나)는 공동체의 존속에 매우 필요한 노동임에도 불구하고 그 사회적 가치를 인정받지 못한 노동에 대한 설명이다. 이런 노동은 가사노동처럼 주로 사적인 영역에서 일어나기에 오랫동안 공적인 평가나 보상이 이루어지지 않았다. 따라서 사회 공동체의 안녕과 유지에 중요하지만 그에 합당한 사회경제적 지위를 획득하지 못한 노동의 경우 경제적 보상을 통해 사회적 지위를 높여야 한다는 입장이다. 이런 보상을 통해 삶의 만족감이 높아져 사회 전체에도 도움이 된다는 논지다. 이런 논지를 활용하여 기본소득을 제공함으로써 다양한 무보수 노동에 대한 경제적 보상이 이루어질 뿐 아니라 사회적 가치와 지위도 높아질 수 있다는 점에서, 기본소득 제도의 도입을 찬성하는 논거로 쓸 수 있다.

제시문 (다)는 오늘날 사회보장 제도의 이론적 근간이 되는 사회권의 개념에 대해 설명하고 있다. 사회권은 과거 물질적 궁핍에서 벗어나는 제한적 의미로 사용되었으나 자본주의가 심화됨에 따라 사회의 구조적 문제에서 발생하는 여러 종류의 위험에서 개인을 보호하는 적극적 의미로 발전했다. 하지만 사회권의 실현은 예산과 직결되기에 제한된 예산 내에서 사회적 약자에게 우선적인 지원이 이루어져야 한다. 특히 사회적 약자는 정책결정 과정에서의 영향력이 부족하므로 이들의 사회권은 법과 제도를 통해 보장받고 있다. 이는 복지란 사회적 약자에게 선별적으로 제공되어야 함을 의미하기에 기본소득 제도에 반대하는 논거로 사용될 수 있다.

제시문 (라)는 로크의 소유권의 근거에 대한 논의를 통해 노동의 가치와 사적 재산의 정당성에 대한 문제를 사고하도록 하는 글 자료다. 로크는 사적 소유란 그 소유물이 개인의 신체를 이용한 노동의 결과물로서, 신체에 대한 배타적인 권리처럼 그것이 산출한 성과물에 대해서도 배타적인 권리가 보장되어야 한다고 주장한다. 또 이러한 사적소유권을 보장하는 것은 사회에 불이익이 되는 것이 아니라 오히려 사람들이 노동을 통한 가치생산에 참여하도록 이끌어 사회전체의 자산도 증식된다고 보고 있다. 마지막으로 노동에 근거한 사적 소유, 즉 재산권의 개념은 현대사회에서 어떤 재산이 정당한가를 판별하는 기준을 제공한다고 보고 있다. 이 제시문은 노동에 근거하지 않고 소득을 부여하는 것은 권리가 없는 사람에게 지원하는 것으로서 공정하지 못하고, 또 인간사회에서 노동이 지니는 가치를 약화시켜 사회전체의 발전에도 악영향을 미칠 수 있다는 이유로 기본소득 제도의 도입을 반대하는 근거로 사용할 수 있다.

제시문 (마)는 노동에 대한 수요가 점차 감소하는 산업구조에서 유효수요 창출을 위한 방안 마련이 필요함을 말하고 있다. 포드 2세의 일화를 통해 로봇이 인간의 노동력을 대체하게 될 경우 전반적으로 소비가 하락할 수 있음을 보여준다. 개인의 소비는 시장경제를 돌아가게 만드는 주요 원천 중 하나이기에 소비자가 구매력을 잃지 않도록 하는 것은 중요한 문제이다. 이는 다가오는 4차 산업혁명을 대비하여 기본소득을 제공함으로써 소비를 진작시켜 유효수요를 창출해야 한다는 논거로 사용될 수 있다.

제시문 (바)는 일본에서 새로 만들어진 조어 ‘프리타’의 의미를 통해 청년세대의 노동에 대한 인식변화를 다룬 글 자료다. 본 지문은 거품경제 시절에 등장한 프리타를 개인보다는 조직을 중시해온 일본의 기업문화에 대한 청년세대의 저항으로 인식해야한다는 입장에 대해 그렇지 않다는 주장을 한다. 자신의 삶을 즐기기 위해 노동 시간을 최소화하려는 이런 태도가 거품경제 이후에는 오히려 사회적 문제가 되고 있다는 입장이다. 따라서 노동력의 감소는 경제성장과 사회발전을 저해할 수 있다는 입장에서 기본소득은 노동 유인을 감소시켜 경제의 활력을 떨어뜨릴 수 있다는 점에서, 기본소득 제도 도입의 반대 논거로 쓸 수 있다.

제시문 (사)는 주어진 자료를 올바르게 해석하고 활용하는 능력을 평가한다. 특히 기본소득 제도와 기존 사회복지 제도의

장단점을 여러 가지 측면에서 평가하는 통계자료를 정확히 해석하고, 이를 바탕으로 각 복지정책안의 효과와 부작용에 대하여 비교·분석할 수 있는지를 평가한다. 구체적으로, 각 자료에 제시된 수치와 도표의 의미를 읽어낼 수 있고, 이를 사용하여 경제활동인구의 변화, 복지행정의 효율성, 소득불평등 상태 등의 차이나 변화를 읽어낼 수 있는지를 평가한다.

<자료 1>은 네 가지 복지정책안의 특징을 제시한다. 기본소득 제도가 도입될 경우, 사회보험, 공공 부조 등 기존 복지정책과의 예산배분 방식에 따라 여러 가지 정책안이 도출될 수 있음을 이해한다. 이를 통해 제시된 네 가지 정책안의 차이를 이해할 수 있다.

<자료 2>는 각 복지정책안에 따른 경제활동인구 규모의 변화를 나타낸다. <자료 2>의 해석을 위해서는 먼저 경제활동인구와 비경제활동인구의 개념을 이해하고, 경제활동인구의 규모가 국가의 노동공급 규모를 판단하는 데 활용됨을 이해해야 한다. 그리고 <자료 2>는 시간에 따른 상태 변화(과거 시점에서 미래 시점으로 변화)를 도표화하는 전형적인 방식으로 제시된 수치 중 어떤 것이 비경제활동인구로의 이탈을 나타내는 것인지, 어떤 것이 경제활동인구로의 유입을 나타내는 것인지를 파악할 수 있어야 한다. 이를 통해 정책안의 특징에 따라 비경제활동인구로의 이탈 유인, 반대로 경제활동인구로의 유입 유인에 미치는 영향이 다름을 설명하고 그에 따른 노동공급의 변화를 비교할 수 있다.

<자료 3>은 복지정책을 실행하는 과정에서 부적격자의 수급이나 적격자의 미수급과 같은 행정 비효율이 발생할 수 있음을 이해하고, 자료에 제시된 4분면 중 이와 같은 행정 비효율을 나타내는 영역이 어떤 영역인지를 읽어낼 수 있다. 이를 통해 선별이 필요한 기존의 사회보장 제도에서는 행정착오나 신청자의 기망으로 인한 부정 수급, 낙인효과나 절차의 복잡성으로 인한 자발적 미수급, 정책 미비나 제도의 허점으로 인한 사각지대의 발생이 나타날 수 있음을 이해한다. 반면 무조건적, 보편적으로 지급되는 기본소득 제도는 이러한 복지행정의 효율성 측면에서 장점이 있음을 읽을 수 있다.

<자료 4>는 소득 불평등 정도를 나타내는 자료이다. 먼저 시장소득과 처분가능소득의 차이를 이해하고 복지정책으로 인한 소득 재분배 효과를 측정하기 위해서는, 공적 이전지출과 공적 이전소득이 반영된 처분가능소득을 사용해야 함을 이해한다. <자료 4>는 도표 자료로부터 고소득층(5분위)과 저소득층(1분위)의 평균소득 변화와 이에 따른 소득 불평등의 정도의 차이를 비교할 수 있다.

3. 채점 기준

문항 1 총 60점

제시문 (가)~(바)를 활용한 선택의 정당화 : 20점

- 제시문 (가)~(바)를 활용한 선택의 정당화(15점)

주장 1(찬성) 선택의 정당화	주장 2 (반대) 선택의 정당화
(가)의 논거: 공유재에 대한 공동의 권리(5점) (나)의 논거: 무보수 노동에 대한 사회적 가치 부여와 보상(5점) (마)의 논거: 소비확대를 통한 유효수요 창출(5점)	(다)의 논거: 한정된 재정을 고려한 사회적 약자 우선 지원(5점) (라)의 논거: 무노동 보수의 부당함과 노동을 통한 사회적 부의 창출(5점) (바)의 논거: 근로의욕 약화로 인한 노동공급 감소(5점)

- 글의 논리성(5점) : 글 전체가 일관성을 유지하고, 논리적으로 잘 연결되고 설득력이 있음

제시문 (가)~(바)를 활용한 자신이 선택한 주장에 대한 반론 : 20점

- 제시문 (가)~(바)를 활용하여 자신의 선택에 대한 반론(15점)

주장 1(찬성)에 대한 반론	주장 2(반대)에 대한 반론
(다)의 논거: 한정된 재정을 고려한 사회적 약자 우선 지원(5점) (라)의 논거: 무노동 보수의 부당함과 노동을 통한 사회적 부의 창출(5점) (바)의 논거: 근로의욕 약화로 인한 노동공급 감소(5점)	(가)의 논거: 공유재에 대한 공동의 권리(5점) (나)의 논거: 무보수 노동에 대한 사회적 가치 부여와 보상(5점) (마)의 논거: 소비확대를 통한 유효수요 창출(5점)

- 글의 논리성(5점) : 글 전체가 일관성을 유지하고, 논리적으로 잘 연결되고 설득력이 있음

반론에 제기된 논거에 대한 재반박 논리 : 20점

- 제시문 (가)~(바)를 활용하여 반론에 대한 재반박(15점)

주장 1(찬성) 선택 재반박 논리(예시)	주장 2(반대) 선택 재반박 논리(예시)
(다)의 논거 재반박: 행정적 낭비와 낙인효과(5점) (라)의 논거 재반박: 무한한 이윤추구로 인한 지구 생태계 위협(5점) (바)의 논거 재반박: 자기 주도적 삶 추구(5점)	(가)의 논거 재반박: 공유재에 대한 지분 평가의 어려움과 불공정성(5점) (나)의 논거 재반박: 무보수 노동을 위한 일률적 보상은 사회적 낭비, 인식 개선과 복지 효율화를 통해 보상 가능(5점) (마)의 논거 재반박: 새로운 일자리 창출 가능, 기본소득이 모두 소비로 이어지지 않음(5점)

- 글의 논리성(5점) : - 자신의 주장을 정당화할 때 사용했던 논거를 단순 반복할 경우 감점
- 글 전체가 일관성을 유지하고, 논리적으로 잘 연결되고 설득력이 있음

문항 2 총 40점

제시문 (가)의 <자료 2>~<자료 4> 해석 : 30점

- <자료 2> 해석 (10점)

- 수치 해석(9점): A와 B는 C와 D보다 경제활동인구에서 비경제활동인구로 전환된 비중은 낮고, 비경제활동인구에서 경제활동인구로 전환된 비중은 높음
- 의미 해석(1점): 산업구조와 노동수요가 변함없는 상황에서 C와 D는 노동유인이 감소하여 노동공급 부족을 초래할 수 있음

- <자료 3> 해석 (10점)

- 수치 해석(9점): C와 D는 A와 B보다 부적격자의 수급률과 적격자의 비수급률이 더 낮음
- 의미 해석(1점): A와 B는 선별적 사회보장제도가 갖는 행정의 비효율성으로 인해 부정 수급과 낙인효과 등의 문제가 발생할 수 있음

- <자료 4> 해석 (10점)

- 그림 해석(9점): B와 C는 A와 D보다 1분위 평균소득과 5분위 평균소득 격차가 적어 소득불평등 정도가 적음
- 의미 해석(1점): 복지예산이 늘어난 B, C에서 고소득층의 공적 이전지출이 늘어나 처분가능소득이 줄고 저소득층의 공적 이전소득이 늘어나 처분가능소득이 높아짐

정책 선택에 대한 논증

- 성과가 우수한 정책안의 선택 (5점)

- <자료 2>~<자료 4>의 해석을 통한 선택: B, C안

※ 정책의 선택이 잘못된 경우, 본 평가항목의 점수(5점) 없음

- 자신의 주장에 맞는 C안(주장 1) 혹은 B안(주장 2) 선택과 정당화 (5점)

주장 1 : C안 선택의 논리(예시)	주장 2 : B안 선택의 논리(예시)
<자료 2>에서 노동공급 부족이 예상되나 4차산업혁명으로 노동수요가 줄어들게 될 경우 문제 없음	<자료 3>에서 복지행정의 비효율 문제는 복지수급 감시 강화, 선별절차 간소화 등의 노력을 통해 개선 가능

※ 정책의 선택이 잘못된 경우, 본 평가항목의 점수(5점) 없음

※ 정당화의 논거가 얼마나 논리적이고 설득력이 있는가에 따라 차등 부여

감점 요소

[형식 요소] 다음에 해당하는 경우, 각 항목별 5점 이내 감점(-)

- 쓸데없는 서론 혹은 결론을 부연함
- 제시문에 나와 있는 문장을 원래의 완전한 문장 형태를 유지한 채 그대로 옮겨 적음
- 원고지 작성법, 맞춤법, 띄어쓰기 등의 오류, 부적절하거나 부정확한 어휘나 문장 등의 문제가 전반적으로 심각함

※ 1번 문항과 2번 문항 각각 (-)15점 이상 감점할 수 없음

[분량] 기준 분량을 어긴 경우(미달 또는 초과) 아래의 표에 따라 점수 조정 : (-)10점까지

1번	500자 미만 (결시 아닌 백지 포함)	(답안 내용에 관계없이) 0점 부여
	500자 - 699자	10점 감점(-)
	700자 - 899자	5점 감점(-)
	900자 - 1,100자	감점 없음
	1,100자 초과	5점 감점(-)
2번	350자 미만 (결시 아닌 백지 포함)	(답안 내용에 관계없이) 0점 부여
	350자 - 489자	10점 감점(-)
	490자 - 629자	5점 감점(-)
	630자 - 770자	감점 없음
	770자 초과	5점 감점(-)

4. 예시 답안

문항 1

* 주장 1(기본소득 제도 도입을 찬성)을 택한 경우

기본소득 제도 도입을 찬성한다. 먼저 사회의 부는 노동을 통해서만이 아니라 공유적 성격이 강한 사회 인프라, 빅데이터나 인공지능과 같은 기술, 그리고 천연자원 등을 이용해서도 생산되기 때문이다. 따라서 이런 공유재를 이용하여 생산된 부에 대해서는 사회 전체에게 공동의 권리가 있다. 또한 기본소득은 공동체의 존속에 필요하지만 그 사회적 가치를 인정받지 못한 노동에 대한 경제적 보상의 의미도 지닌다. 기본소득은 이런 사회활동의 가치를 향상시켜 삶의 만족감을 높일 수 있다. 끝으로 기본소득은 사람들에게 직접 현금을 지급함으로써 소비자의 시장 참여를 북돋을 수 있다. 기본소득을 지급하게 되면 누구든지 소비자로서의 구매력을 일정하게 유지할 수 있고, 이것은 소비 증가로 이어져 시장의 활력을 높이는데 기여할 수 있다.

하지만 아무리 천연자원이라도 일단 노동이 가해져 경제적 가치가 생산된다면 더 이상 공유재로 간주될 수 없다는 반론이 있다. 개인의 노동은 사적인 것이기에 그 노동의 결과로 생산된 것에 대해서도 사적인 소유권을 인정하고 보호해야 한다는 것이다. 또한 빈곤이나 질병처럼 돌봄이 필요한 문제를 해결하기 위해서 제한된 국가 예산 안에서 이런 사회권을 가장 필요로 하는 약자들에게 재정이 우선 분배되어야 한다는 주장도 있다. 끝으로 노동을 하지 않는데도 기본소득을 지급할 경우 근로의욕이 약해져 경제성장의 동력이 떨어진다는 반론도 있다.

그렇지만 자원의 유한성을 생각할 때 노동의 투입만으로 사적 소유권을 주장하는 데는 한계가 있다. 자연에 대한 사적 소유권의 남용은 무한한 이윤추구로 이어져 하나뿐인 지구 생태계를 위협하게 될 것이다. 또한 사회적 약자에게 사회권을 우선 배분하는 것은 한정된 재정에서는 필요한 일이지만 대상을 선정하는 행정적 낭비뿐 아니라 대상자가 느낄 사회적 낙인에 대한 비용도 만만치 않다. 끝으로 기본소득으로 노동의욕이 떨어지기보다는 오히려 기존의 고용구조에 얽매이지 않은 채 자신만의 주도적인 삶을 추구할 수도 있다. 이렇듯 기본소득 제도가 야기할 문제보다 그로 인해 얻게 될 가치가 더 크므로 도입에 찬성한다.

(원고지 기준 1,029자)

* 주장 2(기본소득 제도 도입을 반대)를 택한 경우

기본소득 제도 도입을 반대한다. 먼저 기본소득은 전 국민을 대상으로 하는 만큼 많은 재정이 소요되기 때문에 도움이 필요 없는 사람까지 지원하기보다 사회적 보호가 꼭 필요한 약자를 우선적으로 지원하는 것이 더 공정하다. 둘째, 정당한 재산권은 자기의 노동을 기반하고 있다. 노동에 관계없이 보편적으로 지급되는 기본소득은 이러한 정당한 재산권의 개념에 어긋나 노동의 가치를 약화시키고, 사적 소유권에 의해 추동되는 사회적 부의 창출을 저해할 수 있다. 마지막으로 일본의 ‘프리타’ 사례에서 보듯이 기본소득의 지급은 노동유인을 약화시켜 산업이 필요로 하는 노동의 공급을 감소시킴으로써 국가경제가 위축될 수 있다.

그러나 사회의 부는 직접적인 노동만이 아니라 공유재 성격을 지닌 사회 인프라, 빅데이터나 인공지능과 같은 기술, 천연자원 등을 이용하여 생산되기 때문에 모든 사회 구성원의 노동이 포함되어 있어 그 수익 중 일부는 균등하게 분배되어야 한다는 반론이 있을 수 있다. 또한 자동화에 의해 고용의 감소 및 그에 따른 총수요가 줄어들 것으로 예상되는 상황에서 현금성 기본소득을 지급하여 소비자의 구매력을 높일 수 있다는 주장도 있다. 마지막으로 공동체의 존속에 중요한 역할을 하면서도 그에 상응하는 사회적 가치를 인정받지 못하는 노동을 보상하고, 그러한 노동에 대한 만족감을 높이기 위해서 기본소득이 필요하다는 주장이 있다.

하지만 공유재의 사회적 부에 대한 기여와 그에 따른 사회 구성원의 지분을 정확히 평가하기 어렵고, 헌법이 보장한 재산권을 약화시킬 수 있어 불공정하다. 또한 자동화 등의 기술 발전으로 일부 분야에서 고용이 감소해도 또 새로운 일자리가 창출되어 전체 고용과 총수요 역시 감소하지 않을 것이며, 지급된 기본소득이 전적으로 소비로 이어지는 것도 아니다. 마지막으로 사회보장의 사각지대에 있는 노동을 보상하고자 모든 사람에게 혜택을 주는 것은 사회적 낭비이며 복지항목의 세부적 설계와 사회적 인식 개선을 통해 해결할 수 있다. 따라서 기본소득 제도는 그 효용보다 현실에서 발생할 수 있는 문제가 더 클 것으로 판단되어 도입에 반대한다.

(원고지 기준 1,043자)

문항 2

* C안을 택한 경우

주어진 자료에서 성과가 우수한 두 안은 B, C안이다. 먼저 <자료 2>에 따르면 기본소득을 지급한 C, D안에서 현재 경제활동을 하다 5년 후 그만두는 인구의 비중은 A, B안에 비해 높아지고, 현재 경제활동을 하지 않지만 5년 후 하게 되는 인구의 비중은 낮아졌다. 산업구조와 노동 수요에 변화가 없다는 가정 하에서 C, D안은 노동 유인의 감소로 인한 노동공급 부족을 초래할 수 있다. <자료 3>에서 2사분면은 복지 급여를 받을 자격이 없는 자가 부정 수급한 경우, 4사분면은 자격이 있는 자가 수급하지 않은 복지의 사각지대를 나타낸

인하대학교 논술고사 기출문제(자연)

2022학년도 논술 모의고사 문제 및 해설

2021학년도 논술고사 기출문제 및 해설(오전-의예과 외)

2021학년도 논술고사 기출문제 및 해설(오전-의예과)

2021학년도 논술고사 기출문제 및 해설(오후)

다. A, B안은 선별적 사회보장 제도가 가진 행정의 비효율성으로 인해 C, D안보다 부정 수급과 사각지대의 규모가 더 클 것으로 예상되었다. <자료 4>에서는 복지규모 확대를 통해 부유층의 공적 이전지출이 늘고 빈곤층의 공적 이전소득이 높아진 B, C안에서, 5분위와 1분위의 평균소득 간 차이가 A, D안보다 작게 나타났다. 이를 통해 B, C안이 A, D안에 비해 소득재분배 효과가 큼을 알 수 있다. 이상의 결과를 종합할 때, 정책성고가 우수한 두 안은 B, C안이고 이 중 기본소득 제도 도입에 찬성하는 안은 C안이다. C안의 경우 비록 <자료 2>에서 노동공급 부족이 예상되기는 하나 이는 산업구조에 변화가 없다는 가정에서 나온 결과로, 4차 산업혁명이 본격화되어 노동수요가 줄어들게 되면 비경제활동인구가 줄어들더라도 노동공급이 부족해지지 않을 것이다. (원고지 기준 696자)

* B안을 택한 경우

정책효과가 우수한 안은 B안과 C안이다. <자료 2>에서 A와 B안은 나머지 두 안에 비하여 경제활동인구가 비경제활동인구로 전환된 비율이 6.5%와 6.8%로 낮고, 그 반대의 경우는 높다. 이는 기본소득 제도가 도입된 C와 D안은 노동유인을 감소시켜 노동공급이 줄어들고 있음을 의미한다. <자료 3>에서 D와 C안은 나머지 두 안에 비해 부정 수급과 적격자의 비수급 비율이 낮다. 이는 A와 B안은 소득조사 등 복잡한 선별과정으로 행정의 비효율성이 높음을 의미한다. 마지막으로, <자료 4>를 보면 B와 C안은 예산을 확대하는 안으로 세율증가 등으로 고소득층의 공적 이전지출이 늘어나 처분가능소득이 낮아지며, 저소득층은 복지예산 증가나 기본소득 지급으로 공적 이전소득이 늘어나 처분가능소득이 높아졌다. 이는 B와 C안은 나머지 안에 비해 5분위와 1분위 간 소득격차를 감소시켜 소득 재분배 효과가 더 큰 것을 의미한다. 위의 결과를 종합하면 B와 C안의 정책성고가 나머지 안들에 비해 더 우수하다. 이 중 B안은 복지행정의 비효율 문제가 있기는 하지만 이는 부정수급에 대한 감시를 강화하고 선별절차를 간소화하는 등의 복지행정력을 강화하는 것으로 해결될 수 있다. 복지정책에서 더 중요한 문제는 노동유인 약화를 막고 소득 불평등을 해소하는 것인데 B안은 이 두 기준에서 모두 우수하므로 기존 복지정책을 강화하는 것이 더 바람직하다는 주장을 뒷받침한다. (원고지 기준 681자)

문항 1 (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [사인법칙] 삼각형 ABC 에서 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

이다.

(나) [코사인법칙] 삼각형 ABC 에서

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

이다.

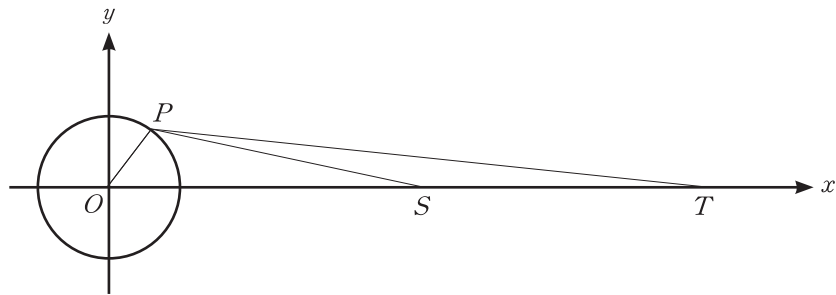
(다) [음함수의 미분법] 음함수 표현 $f(x, y) = 0$ 에서 y 를 x 의 함수로 보고 양변을 x 에 대하여 미분하여

$\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

(라) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (단, x 의 단위는 라디안)

(※) 단위원 위의 한 점을 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 라 하자. 여기서 θ 는 $0 \leq \theta \leq \pi$ 를 만족한다.

점 P 로부터 거리가 4와 8인 x 축의 양의 방향 위의 점들을 각각 S 와 T 라 하자.



(1-1) (a) 점 S 의 x 좌표를 변수 θ 에 관한 식으로 나타내시오. [5점]

(b) 원점을 O 라 하자. 각 $\angle OPS$ 의 크기를 $f(\theta)$ 라 할 때, $f'(\pi/2)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) (a) 각 $\angle PSO$ 를 θ_1 라 하자. $\sin \theta = \frac{1}{5}$ 일 때, $\sin \theta_1$ 의 값을 구하시오. [5점]

(b) 각 $\angle SPT$ 의 크기를 $g(\theta)$ 라 할 때, 극한값 $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{g(\theta)}{\pi - \theta}$ 를 구하시오. [10점]

문항 2 (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 구간 $[a, b]$ 에서 일대일인 연속함수 $g(x)$ 와 구간 $[c, d]$ 에서 정의된 연속함수 $h(x)$ 에 대하여, $h(x)$ 의 치역

이 함수 $g(x)$ 의 치역의 부분집합이라고 하자. 이때, 구간 $[c, d]$ 에 속하는 모든 실수 α 에 대하여 $f(\alpha)$ 를 $g(\beta) = h(\alpha)$ 가 성립하는 수 $\beta(a < \beta < b)$ 로 정의하면, $f(x)$ 는 구간 $[c, d]$ 에서 정의된 함수이다.

구간 $[c, d]$ 의 임의의 실수 α 에 대하여, 함수 $f(x)$ 의 정의를 따르면 $g(f(\alpha)) = h(\alpha)$ 이고 함수 $g(x)$ 와 함수 $h(x)$ 는 연속함수이므로,

$$g(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = h(\alpha)$$

이고 $g(x)$ 가 일대일함수라는 사실로부터 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ 를 얻는다.

따라서 $f(x)$ 는 구간 $[c, d]$ 에서 연속이고 $(g \circ f)(x) = h(x)$ 이다.

(나) [사잇값의 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(2-1) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq f(x) \leq 2\pi$ 이고

$\sin f(x) = \cos x$ 를 만족할 때, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $\sin f(x) = |x| - |x - 3| + |x - 4| - 3$ 을 만족할 때, $b - a$ 의 최댓값을 구하시오. [10점]

(2-3) 실수 a_1, a_2, a_3, a_4 가 다음 조건을 만족한다.

(i) $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3$)

(ii) $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ 인 실수 x 에 대하여 $\sin f(x) = \cos(nx) + 1$ ($n = 1, 2, 3$)이고,

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 존재한다.

$a_1 = \frac{\pi}{2}$ 일 때, a_2, a_3 의 값을 구하고 a_4 의 최댓값을 구하시오. [15점]

문항 3 (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [부분적분법] 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx가 성립한다.$$

(나) $x_1 \neq x_2$ 일 때, 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 이다.

(3-1) 상수 a, b 에 대하여 다음을 만족하는 이차함수 $g(x)$ 를 구하시오. [15점]

실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$ 가 연속이며 $f(a) = f(b) = 0$ 인 임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

이다.

(3-2) **(3-1)**에서 구한 함수 $g(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$ 가 연속인

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a) + f(b))(b - a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

(3-3) $\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \leq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$ 임을 보이시오. [10점]

2022학년도 모의고사 문제(자연 : 의예과)

문항 1 2022학년도 논술 모의고사 문제(자연:의예과 외)의 문항2와 동일

문항 2 2022학년도 논술 모의고사 문제(자연:의예과 외)의 문항3와 동일

문항 3 (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [수학적 귀납법] 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n = 1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(2) $n = k$ ($k \geq 1$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n = k + 1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(나) [집합의 분할] 집합 X 에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 집합 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 을 “ X 의 분할”이라 한다.

(1) 모든 $i = 1, 2, \dots, m$ 에 대하여 $\emptyset \neq A_i \subseteq X$ 이다.

(2) 서로 다른 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ 에 대하여 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 이다.

(3) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = X$

예를 들어, $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ 와 $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ 는 모두 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 분할이다. 또한, m 개의 부분집합으로 구성된 X 의 분할이 존재하면, “ X 를 m 개의 집합으로 분할 가능하다”라고 한다.

(※) 자연수를 원소로 갖는 공집합이 아닌 집합 A 가 다음 조건 중 하나를 만족하면 A 를 “독립적인 집합”이라 부르자.

(1) $n(A) = 1$

(2) A 의 임의의 서로 다른 두 원소 x, y 에 대하여 x 는 y 의 약수도 아니고 배수도 아니다.

(3-1) (a) 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 $A_n = \{2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n\}$ 은 독립적인 집합임을 보이시오. [5점]

(b) 임의의 자연수 n 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ 을 $n + 1$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능함을 보이시오. [5점]

(3-2) 자연수 n 에 대하여 $D(n)$ 을 n 의 모든 약수의 집합이라 하자.

(a) 음이 아닌 정수 m 에 대하여 집합 $X_m = \{2^a \cdot 3^b \mid a \text{ 와 } b \text{는 } a + b = m \text{을 만족하는 음이 아닌 정수}\}$ 가 독립적인 집합임을 보이시오. [5점]

(b) 음이 아닌 정수 a, b 에 대하여 $D(2^a \cdot 3^b)$ 은 $a + b + 1$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능함을 보이시오. [5점]

(3-3) 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제가 성립함을 보이시오. [10점]

$a + b \geq 1$ 인 모든 음이 아닌 정수 a, b 에 대하여 $D(2^a \cdot 3^b)$ 은 $a + b$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

문항 ①

1. 출제 의도

삼각형에 관련된 사인법칙, 코사인법칙 등 기본적인 성질들을 비롯하여 더 나아가 삼각함수의 미분에 관련된 내용을 숙지하고 있는지를 종합적으로 확인하는 문제이다. 각 문항의 (a)는 사인법칙, 코사인법칙을 상황에 맞게 적용할 수 있는지를 확인하는 문제이다. (1-1)(b)에서는 함수가 아닌 방정식으로부터 필요한 도함수를 음함수를 이용하여 구할 수 있는지를 확인하고자 했다. (1-2)(b)에서는 극한을 구할 때, 삼각함수의 극한을 활용할 수 있는지를 확인하고자 했다.

2. 문항 해설

- (1-1) (a) 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 한 변을 이웃한 두 변과 그 대각에 관한 식으로 나타낼 수 있다.
- (1-1) (b) 코사인법칙을 이용하면 구하고자 하는 각을 포함하는 방정식을 구할 수 있다. 함수가 아닌 방정식의 경우, 음함수 미분을 활용하면 관련 도함수 및 미분계수를 구할 수 있다.
- (1-2) (a) 사인법칙은 삼각형의 각 변들을 그 대각의 사인함수 및 외접원의 반지름으로 나타낸다. 이를 활용하면 이웃한 두 변의 길이를 이용해 대각에 대한 사인값의 비를 알 수 있다.
- (1-2) (b) 문제 (1-2)(a)의 과정과 삼각함수의 극한을 이용하면, 주어진 문제를 기본적인 삼각함수의 극한 문제로 표현할 수 있다.

3. 채점기준

- (1-1)(a) • 코사인법칙을 적용하여 방정식을 구하면 3점
- 양수 조건 및 삼각함수의 범위를 이용하여 문제를 완전히 해결하면 2점
- (1-1)(b) • 코사인법칙을 이용하여 방정식을 구하면 2점
- 음함수를 이용하여 $f'(\theta)$ 를 $s, \frac{ds}{d\theta}, f(\theta)$ 로 표현하면 3점
- (1-1)(a)의 관계식을 미분하여 $\frac{ds}{d\theta}$ 를 구하면 2점
- 주어진 값들을 대입하여 $f'(\theta)$ 를 구하면 3점
- (1-2)(a) • 사인법칙을 이용하여 관계식을 구하면 3점
- 계산 실수 없이 답을 구하면 2점
- (1-2)(b) • 각 $\angle PSO$ 와 각 $\angle PTO$ 를 이용하여 $g(\theta)$ 를 표현하면 2점
- 사인함수의 극한을 이용하여 주어진 극한을 θ 에 관한 구체적인 극한으로 나타내면 5점
- 사인함수의 극한을 이용하여 구하고자 하는 극한을 구하면 3점

4. 예시 답안

(1-1) (a) S 의 좌표를 $(s, 0)$ 이라 하자. 선분 PS 의 길이는 피타고라스 정리에 의해서 $\sqrt{(\cos \theta - s)^2 + (\sin \theta)^2} = 4$ 이므로 이

것을 s 에 대해서 풀면 $s = \cos \theta \pm \sqrt{16 - (\sin \theta)^2}$ 이 된다. S 는 x 축의 양의 방향 위의 점이고, $|\cos \theta|, |\sin \theta| \leq 1$ 이므로

로 $s = \cos \theta + \sqrt{16 - (\sin \theta)^2}$ 가 된다.

(b) 제시문 (나)를 삼각형 $\triangle OPS$ 에 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$s^2 = 1^2 + 4^2 - 8\cos f(\theta)$$

이를 제시문 (다)를 이용하여 θ 에 대해서 미분하면

$$2s \cdot \frac{ds}{d\theta} = 8\sin f(\theta) \cdot f'(\theta)$$

를 얻을 수 있다. 이 때, (a)의 결과를 θ 에 대해서 미분하면, $\frac{ds}{d\theta} = -\sin \theta - \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sqrt{16 - (\sin \theta)^2}}$ 임을 알 수 있다.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\frac{ds}{d\theta} = -10$ 이고, $\sin f(\theta) = \frac{s}{4}$ 이므로, 두 식을 이용하면 $f'(\theta) = -1$ 을 얻을 수 있다.

(1-2) (a) 제시문 (가)를 삼각형 $\triangle PSO$ 에 이용하면, $\sin \theta_1 = \frac{\sin \theta}{4}$ 이므로 $\sin \theta_1 = \frac{1}{20}$ 임을 알 수 있다.

(b) 각 $\angle PSO$ 를 θ_1 , 각 $\angle PTO$ 를 θ_2 라 하자. 그러면 $g(\theta) = \theta_1 - \theta_2$ 이며, (1-2) (a)에서와 같은 방법으로

$\sin \theta_1 = \frac{\sin \theta}{4}, \sin \theta_2 = \frac{\sin \theta}{8}$ 임을 쉽게 알 수 있다. 그리고 $\lim_{\theta \rightarrow \pi-} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \theta_1 = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \theta_2 = 0$ 이므로

제시문 (라)에 의해서 $\lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{\sin \theta_2}{\theta_2} = 1$ 이 된다.

따라서, 다음과 같이 구하고자 하는 극한을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{g(\theta)}{\pi - \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi - \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \left(\frac{\theta_1}{\pi - \theta} - \frac{\theta_2}{\pi - \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \left(\frac{\sin \theta_1}{\pi - \theta} \cdot \frac{\theta_1}{\sin \theta_1} - \frac{\sin \theta_2}{\pi - \theta} \cdot \frac{\theta_2}{\sin \theta_2} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}{\pi - \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \frac{\sin \theta}{8(\pi - \theta)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

문항 ②

1. 출제 의도

연속 함수의 개념을 잘 이해해서 주어진 상황에서 연속 함수가 구성될 조건을 정확히 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

사잇값의 정리는 직관적으로 당연하게 생각되는 결론을 수학적으로 논증할 수 있게 해주는 도구인데, 이러한 도구를 이용해서 직관적으로 값만 얻지 않고 그 값이 되어야만 하는 상황을 엄밀하게 증명할 수 있는지 평가하는 것이 (2-1)의 출제 의도이다. (2-2)는 함수를 합성했을 때 정의역과 공역/치역이 어떻게 함수의 존재성이 영향을 주는지를 파악하는 문제이며, 제시문을 읽고 주어진 상황에 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2-3)은 구간별로 주어진 함수를 잘 이어붙여서 전체집합에서 연속함수가 되도록 구성하는 문제이며 이는 교과서에서 좌극한/우극한을 이용해서 각 점에서 어떤 함수가 연속인지를 알아내는 예시들의 심화된 형태이다. 좌극한/우극한 뿐 아니라 (2-2)의 상황과 같이 함수 자체가 구간별로 존재하는 또는 존재하지 않는 상황이 되는 경우에 유의하면서 전체함수를 구성해야 해서, 앞의 두 소문항보다 난이도가 다소 높은 변별력을 목적으로 하는 문항이기도 하다.

2. 문항 해설

- **(2-1)** 사인함수가 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 ± 1 이 되는 값을 유일하다는 사실로부터, $f(2\pi), f(3\pi)$ 의 값을 구할수 있고 이로부터 사잇값의 정리를 써서 $f(\frac{5\pi}{2})$ 의 값을 구하고 이를 엄밀하게 증명할 수 있다.
- **(2-2)** $h(x)$ 는 구간을 잘 나누면 각각의 구간에서 일차함수이므로 그래프를 어렵지 않게 그릴 수 있다. 이 그래프의 개형과 사인함수의 공역의 범위를 고려하여 $b-a$ 가 최대가 되는 $f(x)$ 의 정의역 $[a, b]$ 를 구할 수 있다. 이것은 어렵지 않게 직관적으로 구할 수 있지만 이를 수학적으로 논증하기 위해서는 제시문 (가)의 이해가 필요하다.
- **(2-3)** 각각의 구간에서 연속함수가 존재할 조건을 소문항 (2-2)를 풀면서 파악할 수 있었을 것이다. 이러한 조건과 몇 개의 구간에서 구성된 함수를 이어 붙여서 전체 정의역에서 연속함수를 구성하기 위해서는 각각의 구간이 겹치는 점 a_2, a_3 에서의 함수의 좌극한과 우극한이 같도록 해야한다. 이 두 조건을 파악해서 문제의 조건이 만족되는 값을 구할 수 있다.

3. 채점기준

- (2-1)** • 사인 함수의 값의 범위와 함수 $f(x)$ 의 공역에 대한 조건을 이용하여 $f(2\pi) = \frac{\pi}{2}, f(3\pi) = \frac{3\pi}{2}$ 임을 파악하면 5점
- 사잇값의 정리를 적용하여 $f(\frac{5\pi}{2})$ 의 값을 구하면 5점
- (2-2)** • 함수 $h(x)$ 의 그래프를 정확히 그리면 4점
- 함수 $h(x)$ 의 그래프로부터 $[a, b]$ 에 대한 조건을 파악하면 3점
- $b-a$ 가 최대가 되는 a, b 의 값을 구하면 3점
- (2-3)** • $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ 일 때 부등식 $-1 \leq \cos nx + 1 \leq 1$ 이 성립함을 파악하면 4점
- $n = 1, 2$ 일 때 $\cos na_{n+1} + 1 = \cos (n+1)a_{n+1} + 1$ 이어야 함을 파악하면 4점
- 위 두 조건으로부터 a_2, a_3 의 값과 a_4 의 최댓값을 구하면 7점

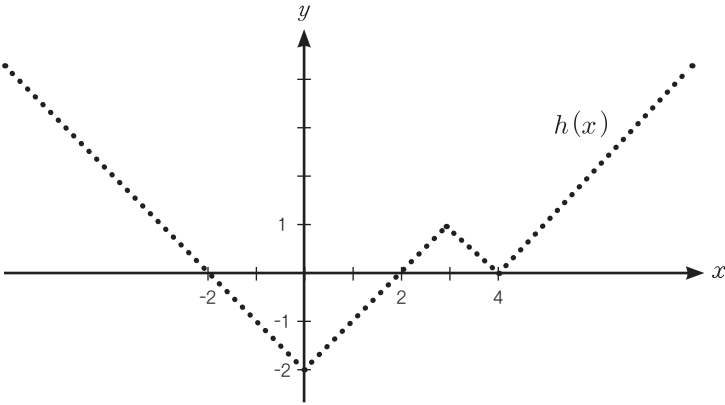
4. 예시 답안

(2-1) 등식 $\sin f(x) = \cos x$ 에 $x = 2\pi$ 와 $x = 3\pi$ 를 대입하면 $f(2\pi) = \frac{\pi}{2}, f(3\pi) = \frac{3\pi}{2}$ 임을 알 수 있다.

사잇값의 정리에 의해 $f(c) = \pi$ 인 c ($2\pi < c < 3\pi$)가 존재하고 이 때

$\cos c = \sin f(c) = 0$ 이어야 하므로, c 의 값은 $\frac{5\pi}{2}$ 이어야 한다. 따라서 $f(\frac{5\pi}{2}) = \pi$ 이다.

(2-2) 함수 $h(x) = |x| - |x-3| + |x-4| - 3$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\sin f(x) = h(x)$ 인 연속함수 $f(x)$ 가 존재하려면 $h(x)$ 의 치역이 사인함수의 치역인 $[-1, 1]$ 에 포함되어야 하므로, $h(x)$ 의 정의역 $[a, b]$ 는 구간 $[-3, -1]$ 에 포함되거나 또는 $[1, 5]$ 에 포함되어야 한다.

사인함수 $g(x) = \sin x$ 는 구간 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 에서 일대일인 연속함수이고 $g(x)$ 의 치역 $[-1, 1]$ 은 $[-3, -1]$ 또는 $[1, 5]$ 에서 정의된 연속함수 $h(x)$ 의 치역을 포함하므로, 제시문 (가)에 의하여 $g(f(x)) = h(x)$ 이고 구간 $[-3, -1]$ 과 $[1, 5]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 각각 존재한다.

$b-a$ 가 최대이려면 $a = 1, b = 5$ 이고, 이때 $b-a = 4$ 이다.

(2-3) 조건을 만족하는 연속함수 $f(x)$ 가 존재하려면,

(A) $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ 일 때 부등식 $-1 \leq \cos nx + 1 \leq 1$ 이 성립해야 하고

(B) $n = 1, 2$ 일 때 $\cos na_{n+1} + 1 = \cos (n+1)a_{n+1} + 1$ 이어야 한다.

이 조건들을 다시 정리해 보면

(A) $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3$) 일 때 $\cos nx \leq 0$ 이고

$\cos na_{n+1} = \cos (n+1)a_{n+1}$ ($n = 1, 2$)이 성립하려면

$(n+1)a_{n+1} = \pm na_{n+1} + 2k\pi$ 이어야 한다. 따라서

(B) $a_{n+1} = 2k\pi$ 또는 $a_{n+1} = \frac{2k\pi}{2n+1}$ 이다 (단, k 는 정수).

(A)에 의하여 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq a_2$ 일 때, 부등식 $\cos x \leq 0$ 가 성립해야 하므로, $a_2 \leq \frac{3\pi}{2}$ 이다.

따라서 (B)에 의하여 $a_2 = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3}$ 이다.

$a_2 = \frac{2\pi}{3}$ 인 경우 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq a_3$ 일 때 부등식 $\cos 2x \leq 0$ 이 성립해야 하므로 $a_3 \leq \frac{3\pi}{4}$ 이다.

(B)에 의하여 $a_3 = \frac{2k\pi}{5}$ (k 는 정수)이어야 하는데, 이런 꼴의 값 중에 $\frac{2\pi}{3}$ 와 $\frac{3\pi}{4}$ 사이의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $a_2 = \frac{2\pi}{3}$ 일 수 없다.

$a_2 = \frac{4\pi}{3}$ 인 경우 $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq a_3$ 일 때 부등식 $\cos 2x \leq 0$ 이 성립해야 하므로 $a_3 \leq \frac{7\pi}{4}$ 이다.

$a_3 = \frac{2k\pi}{5}$ (k 는 정수) 꼴의 값 중에서 $\frac{4\pi}{3}$ 와 $\frac{7\pi}{4}$ 사이의 값은 $a_3 = \frac{8\pi}{5}$ 가 유일하다.

$\frac{8\pi}{5} \leq x \leq a_4$ 일 때 부등식 $\cos 3x \leq 0$ 이 성립하는 가장 큰 a_4 의 값은 $\frac{11\pi}{6}$ 이다.

따라서 $a_2 = \frac{4\pi}{3}$, $a_3 = \frac{8\pi}{5}$ 이고, a_4 의 최댓값은 $\frac{11\pi}{6}$ 이다.

문항 ③ (의예과 외)

1. 출제 의도

부분적분법을 이용하여 주어진 함수에 관한 적분을 이계도함수에 관한 적분으로 표현할 수 있는지를 알아본다. 또한 이 결과를 이용하여 특정한 함수의 적분의 근사값을 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

- (3-1)은 부분적분법을 적용하여 주어진 적분을 변형할 수 있는지를 평가한다.
- (3-2)는 주어진 함수를 적절하게 변형하여 부분적분법을 적용할 수 있는지를 평가한다.
- (3-3)은 (3-2)에서 얻어진 결과를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 부등식을 이끌어낼 수 있는지 알아본다.

3. 채점기준

(3-1) $g(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}$ 임을 보임. 5점
 $g(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}$ 일 때, 부분적분법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임. 10점

(3-2) $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ 가 $h(a) = h(b) = 0$, $h''(x) = f''(x)$ 임을 보임. 5점
 (3-1)의 결과를 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임. 5점

(3-3) $0 \leq \int_0^1 g(x)f''(x)dx \leq \frac{7}{120}$ 임을 보임. 6점

(3-2)의 결과를 이용하여 주어진 부등식을 보임. 4점

4. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{2x-a-b}{2} f(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{2x-a-b}{2} f'(x)dx = - \int_a^b \frac{2x-a-b}{2} f'(x)dx$$

이고,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{2x-a-b}{2} f'(x)dx &= \left[\frac{x^2-(a+b)x+ab}{2} f'(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2-(a+b)x+ab}{2} f''(x)dx \\ &= - \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(x)dx \end{aligned}$$

이다. 따라서 $g(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}$ 에 대하여 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$ 이다.

(3-2) $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ 로 두면
 $h(a) = h(b) = 0$, $h''(x) = f''(x)$

이다. (3-1)의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(x)dx &= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} h''(x)dx \\ &= \int_a^b h(x)dx \\ &= \int_a^b \left\{ f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \right\} dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx \text{가 성립한다.}$$

(3-3) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 이면 $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ 이다. (3-2)의 결과를 이용하면

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2} + \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

이다. 또한 $0 \leq \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} dx = \frac{7}{120}$

이므로 $\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \leq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$ 이다.

문항 ③ (의예과)

1. 출제 의도

이 문제는 약수 배수 관계를 갖는 자연수의 기본적인 성질을 이용하여 명제와 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 수학적 귀납법을 이용하여 논리적으로 명제를 증명할 수 있는지도 평가한다.

2. 문항 해설

- **(3-1)** 서로 다른 두 자연수 a, b 에 대하여 a 가 b 의 배수이면 a 는 $2b$ 이상이라는 사실을 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.
- **(3-2)** 자연수의 소인수분해가 주어졌을 때 약수 배수 관계를 판별할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
- **(3-3)** $\{2^a \cdot 3^b\}$ 이 $2^a \cdot 3^b$ 을 포함하는 유일한 독립적인 집합이라는 것을 파악하면 문제를 해결할 수 있다.

3. 채점기준

- (3-1)** (a) 서로 다른 두 자연수 a, b 에 대하여 a 가 b 의 배수이면 a 는 $2b$ 이상이어야 된다는 사실을 이용하여 증명하면 5점
(b) (a)의 결과를 이용하지 않더라도 올바른 예를 찾아 증명하면 5점
- (3-2)** (a) 의 두 원소 $2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$ 과 $2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$ 에 대하여 $2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$ 이 $2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$ 의 약수일 필요충분조건이 $a_1 \leq a_2$ 이고 $b_1 \leq b_2$ 이라는 사실을 이용하여 증명하면 5점
(b) (a) X_m 의 결과를 이용하여 올바른 예를 찾아 증명하면 5점
- (3-3)** $2^a \cdot 3^b$ 은 $D(2^a \cdot 3^b)$ 의 모든 원소의 배수라는 것을 이용하여 $2^a \cdot 3^b$ 을 포함하는 $D(2^a \cdot 3^b)$ 의 독립적인 부분집합은 $\{2^a \cdot 3^b\}$ 뿐이라는 것을 증명하면 3점
수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하면 7점

4. 예시 답안

- (3-1)** (a) 주어진 집합이 독립적인 집합이 아니라고 가정하자. 그러면 약수 배수 관계인 서로 다른 두 원소 x, y 가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 x 가 y 의 약수라 하면 $2^n \geq y \geq 2x \geq 2(2^{n-1} + 1) = 2^n + 2$ 가 되어 모순이 생긴다. 따라서 독립적인 집합이다.

(b) $\{\{1\}, \{2\}, A_2, \dots, A_n\}$ 은 $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ 의 분할이고 $\{1\}, \{2\}, A_2, \dots, A_n$ 은 서로 다른 독립적인 집합이다. 따라서 $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ 은 $n+1$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다.

- (3-2)** (a) $m=0$ 이면 $X_0 = \{1\}$ 이므로 정의에 따라 X_0 는 독립적인 집합이다. $m \geq 1$ 이라 하자. X_m 이 독립적인 집합이 아니라고 가정하면, X_m 의 서로 다른 두 원소 $x = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$, $y = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$ 이 존재하여 x 가 y 의 약수이거나 y 가 x 의 약수이어야 한다. 일반성을 잃지 않고 x 가 y 의 약수라 하자. 이때 $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ 가 성립하는데 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = m$ 이므로 $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ 가 되어 $x \neq y$ 에 모순이다. 따라서 X_m 은 독립적인 집합이다.

(b) $\{X_0, X_1, \dots, X_{a+b}\}$ 는 $D(2^a \cdot 3^b)$ 의 분할이고 각 X_i 는 독립적인 집합이므로 $D(2^a \cdot 3^b)$ 은 $a+b+1$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다.

- (3-3)** $a+b$ 에 대한 수학적 귀납법을 사용하자.

$a+b=1$ 이면 $D(2^a \cdot 3^b)$ 은 $\{1, 2\}$ 또는 $\{1, 3\}$ 이다. 두 집합 모두 독립적인 집합이 아니므로 하나의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

수학적 귀납법을 사용하기 위하여 $a+b > 1$ 인 경우를 보자. 일반성을 잃지 않고, $a > 1$ 이라 할 수 있다.

$D(2^a \cdot 3^b)$ 을 $a+b$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다고 가정하고, $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{a+b}\}$ 를 독립적인 집합으로의 분할이라 하자. 일반성을 잃지 않고 $2^a \cdot 3^b \in Y_{a+b}$ 라 하자.

$2^a \cdot 3^b$ 은 $D(2^a \cdot 3^b)$ 의 모든 원소의 배수이므로 $Y_{a+b} = \{2^a \cdot 3^b\}$ 이다. 따라서 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{a+b-1}\}$ 은 $D(2^a \cdot 3^b) - \{2^a \cdot 3^b\}$ 의 분할이 된다. 각각의 $i = 1, 2, \dots, a+b-1$ 에 대하여 $Z_i = Y_i \cap D(2^{a-1} \cdot 3^b)$ 라 하고 $Z_1, Z_2, \dots, Z_{a+b-1}$ 중 정확히 d ($\leq a+b-1$)개가 공집합이 아니라고 하자. 일반성을 잃지 않고, $Z_1, Z_2, \dots, Z_d$ 는 공집합이 아니고, $Z_{d+1} = Z_{d+2} = \dots = Z_{a+b-1} = \emptyset$ 이라 하자. $D(2^{a-1} \cdot 3^b) \subset D(2^a \cdot 3^b) - \{2^a \cdot 3^b\}$ 이므로 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_d\}$ 는 $D(2^{a-1} \cdot 3^b)$ 의 분할인데, $d \leq a+b-1$ 이므로 $D(2^{a-1} \cdot 3^b)$ 이 $a+b-1$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다는 귀납 가정에 모순이다. 따라서 $D(2^a \cdot 3^b)$ 은 $a+b$ 개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

- (별해)** $D(2^a \cdot 3^b)$ 이 c ($\leq a+b$)개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다고 가정하고, $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_c\}$ 를 독립적인 집합으로의 분할이라 하자. 집합 $K = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^a, 2^a \cdot 3, 2^a \cdot 3^2, \dots, 2^a \cdot 3^b\}$ 에서 임의로 두 개의 원소를 뺏으면 하나가 반드시 다른 하나의 배수가 된다. 따라서 각각의 $i = 1, 2, \dots, c$ 에 대하여 $n(K \cap Y_i) \leq 1$ 이다.

그런데 $K \subset Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_c$ 이므로 $a+b+1 = n(K) \leq \sum_{i=1}^c n(K \cap Y_i) \leq \sum_{i=1}^c 1 = c \leq a+b$ 가 되어 모순이 생긴다. 따라서 $D(2^a \cdot 3^b)$ 는 $a+b$ 개 이하의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

문항 1 (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계수가 실수인 삼차다항식 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 실수 α, β, γ 에 대해 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ 로 인수분해되는 경우, 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 은 세 실근 α, β, γ 를 갖는다고 한다.
(단, α, β, γ 의 값이 서로 다를 필요는 없다.)

(나) 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이 세 실근 α, β, γ 를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

이 성립하므로 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha + \beta + \gamma = -a, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \quad \alpha\beta\gamma = -c$$

(1-1) 삼차방정식 $x^3 - x - t = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 t 의 값의 범위를 구하시오. (8점)

(1-2) 삼차방정식 $x^3 - x - t = 0$ 이 세 실근 α, β, γ ($\alpha \leq \beta \leq \gamma$)를 갖는다.

(a) 실근 β 의 값의 범위를 구하시오. (5점)

(b) 곡선 $y = x^3 - x - t$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 β 로 나타내고, S 의 최솟값을 구하시오. (17점)

문항 2 (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$ 가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$ 의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 는 $\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt = x \sin^2 x$ 를 만족한다.

(2-1) 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 할 때, $\int_0^\pi x^2 (F(x) - F(0))dx$ 의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) $f(0)$ 의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) 닫힌구간 $[0, 10]$ 에서 함수 $h(x) = \int_0^x (x^3 - t^3)f(t)dt$ 의 최솟값을 구하시오. (15점)

문항 3 (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 임의의 세 점 A, B, C 에 대하여, 부등식 $\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$ 가 성립한다.

역으로, 좌표평면 위에 임의의 두 점 A, B 가 있고, 임의의 두 양수 p, q 가 부등식

$$|p - q| \leq \overline{AB} \leq p + q$$

를 만족하면, $\overline{AC} = p, \overline{BC} = q$ 인 점 C 가 좌표평면 위에 존재한다.

(나) (코사인법칙) 삼각형 ABC 의 세 변의 길이를 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ 라고 하면,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
가 성립한다.

(3-1) 좌표평면에서 $\overline{OP_1} = 10, \overline{P_1P_2} = 20$ 인 점 P_1 이 존재하는 점 P_2 의 집합을 S 라고 할 때, 도형 S 의 넓이를 구하시오. (단, O 는 원점이다.) (5점)

(3-2) 좌표평면에서 $\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{P_2P_3} = a_3$ 인 두 점 P_1, P_2 가 존재하는 점 P_3 의 집합이 $\{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$ 가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3 의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 의 개수를 구하시오. (10점)

(3-3) 자연수 a_1, a_2, a_3 과 실수 θ ($0 \leq \theta < \pi$)에 대하여 다음 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점 P_3 의 집합을 라고 하자.

$\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{P_2P_3} = a_3$ 이고 $\theta \leq \angle OP_1P_2 \leq \pi$ 와 $\theta \leq \angle P_1P_2P_3 \leq \pi$ 를 만족하는 두 점 P_1, P_2 가 존재한다.

(3-2)의 자연수 a_1, a_2, a_3 에 대하여, 집합 T_θ 가 집합 $\{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$ 와 같아지도록 하는 θ 의 값의 범위는 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 이다.

(a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$ 일 때 $\cos \alpha$ 의 값을 구하시오. (10점)

(b) α 가 최대가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3 의 값을 찾고, 이때의 $\cos \alpha$ 의 값을 구하시오. (10점)

문항 ① (의예과, 의예과 외)

1. 출제 의도

이 문제는 방정식의 실근을 두 함수의 그래프의 교점의 좌표로 이해할 수 있는지, 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 정적분으로 연결시킬 수 있는지, 다항식의 연산을 수행할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

- (1-1) 방정식에서의 활용에서와 같이 방정식을 두 함수 $y = x^3 - x$ 와 $y = t$ 의 그래프의 교점으로 이해하면 풀이가 용이하다. 삼차함수의 그래프의 개형에서 극값이 갖는 의미를 바탕으로 방정식의 근의 개수를 연결시키면 $y = x^3 - x$ 의 두 극값 사이에 t 값이 존재할 때 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.
- (1-2) (a) 문항 (1-1)과정에서 사잇값 정리를 통해서 서로 다른 세 실근을 갖는 경우는 어렵지 않게 알 수 있다. 또한 t 가 극값을 취하게 되면 그래프의 개형을 바탕으로 하나의 중근과 다른 한근을 갖게 되므로 이 경우를 포함시키면 구하고자 하는 범위를 구할 수 있다.
- (1-2) (b) 본 문항의 적분은 다항식의 적분으로써 기본적인 정적분을 적용하면 된다. 근과 계수의 관계에 의해서 주어진 관계식과 α, β, γ 가 방정식의 근이 됨을 이용하여 식을 β 에 관하여 정리하면 되는 문제이다. 이후 완전제곱식과 양수의 합의 형태로 나타낼 수 있으므로 (1-2)(a)에서 구한 β 의 범위를 바탕으로 기본적인 부등식 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있다.

3. 채점기준

- (1-1) • 미분을 통하여 $y = x^3 - x$ 또는 $y = x^3 - x - t$ 의 도함수가 0인 점을 찾음(4점)
- t 가 극값 사이에 존재해야 함을 인지함(4점)
- (1-2) • (a) (1-1)에서 구한 두 극값을 갖는 점 사이의 범위를 인지함(2점)
- 서로 같은 두 실근을 인지함(3점)
- (1-2) • (b) 적분을 α, β, γ 의 식으로 올바르게 나타냄(5점)
- 근과 계수의 관계와 α, β, γ 가 $x^3 - x - t = 0$ 의 근임을 인지하여 관계식을 구함 (2점)
 - 적분을 β 에 관한 식으로 나타냄(5점)
 - 부등식 또는 이차함수의 최솟값을 이용하여 최솟값을 구함(5점)

4. 예시 답안

(1-1) $x^3 - x - t = 0$ 의 근을 함수 $y = x^3 - x$ 와 $y = t$ 의 그래프들의 교점으로 생각하자. 함수 $y = x^3 - x$ 가 $x = -1/\sqrt{3}$ 에서 극댓값 $2/\sqrt{3}^3$ 과 $x = 1/\sqrt{3}$ 에서 극솟값 $-2/\sqrt{3}^3$ 을 갖는다. 따라서 $-2/\sqrt{3}^3 < t < 2/\sqrt{3}^3$ 일 때, 사잇값 정리에 의해서 $\alpha < -1/\sqrt{3} < \beta < 1/\sqrt{3} < \gamma$ 인 세 근을 갖는다.

(1-2) (a) (1-1)에서와 같이 구하고자 하는 방정식의 근을 $y = x^3 - x$ 와 $y = t$ 의 교점으로 생각하자. $-2/\sqrt{3}^3 < t < 2/\sqrt{3}^3$ 인 경우 문항 (1-1)에서와 같이 사잇값 정리에 의해서 극대점과 극소점 사이에서 두 번 째 근을 갖는다. 따라서 $-1/\sqrt{3} < \beta < 1/\sqrt{3}$. 그런데 $t = 2/\sqrt{3}^3, t = -2/\sqrt{3}^3$ 인 경우, 각각 $x = -1/\sqrt{3}, x = 1/\sqrt{3}$ 에서 중근을 가지므로 β 의 값은 $-1/\sqrt{3} \leq \beta \leq 1/\sqrt{3}$ 을 만족한다. 나머지 값의 경우 1개의 실근과 2개의 허근을 갖는다.

(1-2) (b) 제시문 (나)에서 주어진 근과 계수의 관계를 이용하면 다음을 얻을 수 있다. $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \alpha\beta\gamma = t, \alpha^3 - \alpha = t, \beta^3 - \beta = t, \gamma^3 - \gamma = t$. 이용하여 다음 정적분을 β 에 관하여 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\gamma} |x^3 - x - t| dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x^3 - x - t) dx - \int_{\beta}^{\gamma} (x^3 - x - t) dx \\ &= \beta^4/2 - \alpha^4/4 - \gamma^4/4 - \beta^2 + \alpha^2/2 + \gamma^2/2 - t(2\beta - \alpha - \gamma) \\ &= \beta(\beta + t)/2 - \alpha(\alpha + t)/4 - \gamma(\gamma + t)/4 - \beta^2 + \alpha^2/2 + \gamma^2/2 - t(2\beta - \alpha - \gamma) \\ &= \alpha^2/4 + \gamma^2/4 - \beta^2/2 - (t - t/4)(2\beta - \alpha - \gamma) \\ &= \frac{1}{4}(\beta^2 - 2\alpha\gamma) - \beta^2/2 - \frac{3t}{4}(3\beta) \\ &= \frac{1}{4}(2 - 3\beta^2 - 9t\beta) = \frac{1}{4}(-9\beta^4 + 6\beta^2 + 2) = -\frac{9}{4}(\beta^2 - \frac{1}{3})^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

문항 (1-2)(a)에서 $-1/\sqrt{3} \leq \beta \leq 1/\sqrt{3}$ 이므로 기본적인 부등식의 연산을 이용하면 $0 \leq \beta^2 \leq 1/3$ 및 $0 \leq (\beta^2 - 1/3)^2 \leq 1/9$ 가 되어 넓이의 최솟값은 $\beta = 0$ 일 때 $1/2$ 이다.

문항 ② (의예과, 의예과 외)

1. 출제 의도

정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 알아보고, 삼각함수의 극한과 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

- (2-1) 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 성질을 찾고 이를 부분적분법에 활용할 수 있는지를 묻는다.
- (2-2) 삼각함수로 주어진 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는다. (2-3) 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악하고 최솟값을 구할 수 있는지를 알아본다.

3. 채점기준

(2-1) • $x(F(x) - F(0)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x \sin^2 x)$ 임을 보임.(4점)

• $\int_0^\pi x^2(F(x) - F(0))dx = -\frac{\pi^2}{8}$ 임을 보임.(6점)

(2-2) • $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x$ 임을 보임.(6점)

• $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$ 임을 보임.(4점)

(2-3) • $h'(x) = \frac{3}{2}x \sin x (\sin x + 2x \cos x)$ 임을 보임.(3점)

• 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고 $x = n\pi$ 일 때 극솟값을 가짐을 보임.(7점)

• 함수 $h(x)$ 가 최솟값 $h(3\pi) = -\frac{27}{8}\pi^2$ 을 가짐을 보임.(5점)

4. 예시 답안

(2-1) 주어진 등식을 미분하면 $2x \int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x \sin^2 x)$ 이므로

$$x(F(x) - F(0)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x \sin^2 x)$$

를 얻는다.

부분적분법과 제시문 (다)를 이용하면

$$\begin{aligned} \int x \sin^2 x dx &= x \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2(F(x) - F(0))dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \sin^2 x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2} x \sin^2 x dx \\ &= - \int_0^\pi \frac{1}{2} x \sin^2 x dx \\ &= - \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x \sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{16} \right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

이다.

(2-2) $x \neq 0$ 이면 $\int_0^x f(t)dt = \frac{\sin^2 x}{2x} + \sin x \cos x$ 이므로

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x$$

이다. f 는 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \cos x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x \right] = \frac{3}{2}$ 이다.

(2-3) $h'(x) = 3x^2 \int_0^x f(t)dt = \frac{3}{2}x \frac{d}{dx}(x \sin^2 x) = \frac{3}{2}x \sin x (\sin x + 2x \cos x)$ 이다.

$h'(x)$ 는 $\sin x = 0$ 이거나 $\tan x = -2x$ 일 때 $h'(x)$ 의 부호가 바뀌고 극값을 갖는다. 곡선 $y = \tan x$ 와 직선 $y = -2x$

을 그려보면 $0 < x < \pi$, $\pi < x < 2\pi$, $2\pi < x < 3\pi$ 일 때 각각 1개씩, 모두 3개의 교점을 갖는다.

그러므로 함수 $h(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	0	...	a_1	...	π	...	a_2	...	2π	...	a_3	...	3π	...	10
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

(2-1)과 같은 방법으로

$$\begin{aligned} h(n\pi) &= \int_0^{n\pi} \frac{3}{2}x \frac{d}{dx}(x \sin^2 x) dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \sin^2 x \right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \frac{3}{2} x \sin^2 x dx \\ &= - \int_0^{n\pi} \frac{3}{2} x \sin^2 x dx \\ &= -\frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} \right]_0^{n\pi} = -\frac{3n^2 \pi^2}{8} \end{aligned}$$

이므로, $h(x)$ 는 구간 $[0, 10]$ 에서 최솟값 $h(3\pi) = -\frac{27}{8}\pi^2$ 을 가진다.

문항 ③ (의예과 외)

1. 출제 의도

삼각형의 세 변의 길이와 제시문 (가)에서 주어진 부등식과의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 좌표평면 위의 점의 집합에 관한 문제를 해결 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

• (3-1) 좌표평면 위의 점이 그리는 도형의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문 (가)에서 주어진 부등식을 이용하여 원점으로 부터 구하려는 점의 거리에 대한 조건을 구할 수 있다.

• (3-2) (3-3) 문제의 조건을 만족하는 점 P_3 가 주어졌을 때, 원점 O 를 중심으로 P_3 를 회전시킨 모든 점도 조건을 만족한다. 또한 P 와 Q 가 집합의 원소라면 O 로부터의 거리가 $\overline{OP}$ 와 $\overline{OQ}$ 사이에 있는 점도 집합의 원소가 된다는 관찰로부터 주어진 조건을 만족하기 위한 가장 중요한 조건이 O 가 집합의 원소가 된다는 사실을 알 수 있다. 이러한 사고의 방식은 연속함수의 개념을 잘 이해하고 있는지를 평가하는 좋은 척도가 된다고 본다.

3. 채점기준

(3-1) • $S = \{P \mid 10 \leq \overline{OP} \leq 30\}$ 임을 보이면 (3점)

• S 의 넓이가 800π 임을 보이면 (2점)

(3-2) • $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 을 보이면 (2점)

• $\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{P_2O} = a_3$ 가 되는 P_1, P_2 가 존재하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 이 만족하는 필요충분조건을 정확하게 찾아내면 (5점)

(조건이 필요충분하다는 것을 예시답안처럼 엄밀하게 증명할 필요는 없으나 연속에 관한 아이디어가 들어가 있어야 함.)

• 조건을 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 의 개수가 10개임을 구하면 (3점)

(3-3) • (a) $\overline{OP_1} = 2, \overline{P_1P_2} = 3, \overline{P_2O} = 4$ 인 삼각형에서 α 가 $\angle P_1$ 와 $\angle P_2$ 중 작은 것과 같다는 것을 보이면 (7점)

• $\cos \alpha = \frac{7}{8}$ 임을 구하면 (3점)

(3-3) • (b) (a_1, a_2, a_3) 이 $(4, 1, 4)$ 일 때 α 가 최대임을 보이면 (7점)

• $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ 을 보이면 (3점)

4. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의해 $\overline{OP_2} \leq \overline{OP_1} + \overline{P_2P_2} = 30, \overline{OP_2} \geq \overline{P_2P_2} - \overline{OP_1} = 10$ 이고, 실제로 $10 \leq \overline{OP_2} \leq 30$ 인 좌표평면의 점 P_2 에 대하여 제시문 (가)에 의하여 $\overline{OP_1} = 10, \overline{P_1P_2} = 20$ 인 P_1 이 존재한다. 따라서 주어진 집합은 $\{P \mid 10 \leq \overline{OP} \leq 30\}$ 과 같고, 넓이는 800π 이다.

(3-2) 조건을 만족하는 점 P_3 의 집합을 T 라고 하자. 제시문 (가)에 의해

$$\overline{OP_3} \leq \overline{OP_2} + \overline{P_2P_3} \leq (\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2}) + \overline{P_2P_3} \leq a_1 + a_2 + a_3$$

이다. $\overline{OP_3}$ 의 최댓값은 O, P_1, P_2, P_3 가 직선위에 이 순서대로 놓여있을 때이고,

이때 $\overline{OP_3} = a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 를 만족하므로 조건을 만족할 때 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 이어야 한다.

(a) $P \in T$ 이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$ 라고 가정하자. 그러면 점 A 는 점 P 를 원점을 중심으로 회전해서 얻어진다. 이때

$\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{P_2P} = a_3$ 인 두 점 P_1, P_2 가 존재하는데 같은 회전에 의해서 P_1, P_2 가 옮겨진 점을 각각

A_1, A_2 라고 하면 $\overline{OA_1} = a_1, \overline{A_1A_2} = a_2, \overline{A_2A} = a_3$ 이므로 $A \in T$ 이다.

(b) $P \in T$ 이고 $\overline{OP} < r < a_1 + a_2 + a_3$ 라고 가정하자. 정의에 의하여 $\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{P_2P_3} = a_3$ 인 두 점 P_1, P_2 가 존재하며, $\angle OP_1P_2 = \alpha_1, \angle P_1P_2P_3 = \alpha_2$ 라고 하자.

$\alpha_1 \leq \theta \leq \pi$ 인 임의의 실수 θ 에 대하여 $\overline{P_1P_2'} = a_2, \overline{P_2'P_3'} = a_3, \angle OP_1P_2' = \theta, \angle P_1P_2'P_3' = \alpha_2$ 인 점 P_2', P_3' 를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3'}$ 라고 정의하자. 마찬가지로,

$\alpha_2 \leq \theta \leq \pi$ 인 임의의 실수 θ 에 대하여 $\overline{P_1P_2'} = a_2, \overline{P_2'P_3'} = a_3, \angle OP_1P_2' = \pi, \angle P_1P_2'P_3' = \theta$ 인 점 P_2', P_3' 를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3'}$ 라고 정의하자. 그러면 $f(\alpha_1) = \overline{OP}, f(\pi) = g(\alpha_2), g(\pi) = a_1 + a_2 + a_3$ 이고 $f(\theta)$ 와 $g(\theta)$ 는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 $y(t) = r$ 의하여 $g(t) = r$ 인 t ($\alpha_1 < t \leq \pi$) 또는 $g(t) = r$ 인 t ($\alpha_2 \leq t < \pi$)가 존재한다. 따라서 $\overline{OP_3'} = r$ 인 어떤 점 P_3' 이 집합 T 의 원소이다.

(a), (b)에 의하여 $T = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$ 일 필요충분조건은 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 이고 $O \in T$ 인 것이다.

$O \in T$ 이라면 $\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{OP_2} = a_3$ 인 두 점 P_1, P_2 가 존재해야하며 이는 세 자연수 a_1, a_2, a_3 중에 가장 큰 것 a 가 다른 두 자연수의 합 $9 - a$ 보다 작거나 같을 때이다. 따라서 자연수 a_1, a_2, a_3 가 조건을 만족하려면, $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ 이고, $a_1, a_2, a_3 \leq 4$ 이어야 한다.

순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 의 개수를 세기위해, a_1, a_2, a_3 중 하나가 5 이상인 것을 빼주면

$${}_3H_6 - 3 \times {}_2H_0 - 3 \times {}_2H_1 - 3 \times {}_2H_2 = {}_8C_2 - 3 \times {}_1C_1 - 3 \times {}_2C_1 - 3 \times {}_3C_1 = 10$$

개다. (또는 중복조합을 쓰지 않고 순서쌍의 개수를 모두 세어도 된다.)

(3-3) 문제 (3-2)의 조건을 만족하는 세 자연수 a_1, a_2, a_3 에 대하여, $T_\theta = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$ 일 필요충분조건은 $O \in T_\theta$ 인 것이다. 따라서 $\overline{OP_1} = a_1, \overline{P_1P_2} = a_2, \overline{OP_2} = a_3$ 인 삼각형 OP_1P_2 의 두 각 $\angle P_1, \angle P_2$ 중에 작은 값이 α 가 된다.

(a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_4 = 4$ 이므로 $\angle P_2 < \angle P_1$ 이다. 따라서 코사인법칙에 의해 $\alpha = \angle P_2 = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$ 이다.

(b) α 가 최대인 경우는 $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 4$ 인 경우이고 $\cos \alpha = \frac{4^2 + 1^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 1} = \frac{1}{8}$ 이다.

문항 1 (35점) 2021학년도 논술고사 기출문제 (오전-의예과 외)의 [문항 2]와 동일

문항 2 (35점) 2021학년도 논술고사 기출문제 (오전-의예과 외)의 [문항 3]과 동일

문항 3 (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(수학적 귀납법) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(2) $n = k$ ($k \geq 1$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n = k + 1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(※) 자연수 m 에 대하여 ($4m + 1$ 개의 원소로 이루어진) 집합

$X = \{-2m, -2m+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 2m-1, 2m\}$ 의 어떤 부분집합 A 가 다음 조건을 만족한다.

A 의 어떠한 원소 a, b, c 에 대하여도 $a + b + c \neq 0$ 이다. 단, a, b, c 가 서로 다를 필요는 없다.

예를 들어, 0은 A 의 원소가 될 수 없다. 왜냐하면 $0 + 0 + 0 = 0$ 이기 때문이다.

(3-1) (a) $-2m \in A$ 인 경우, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 에 대하여 i 와 $2m - i$ 중 하나는 A 의 원소가 될 수 없음을 보이시오. (5점)

(b) $-2m \in A$ 이고 $2m \in A$ 인 경우, $n(A) \leq 2m$ 임을 보이시오. (5점)

(3-2) 수학적 귀납법을 이용하여 $n(A) \leq 2m$ 임을 증명하시오. (15점)

(3-3) 각 자연수 m 에 대하여, 위의 조건을 만족하고 $n(A) = 2m$ 이고 $-2m \notin A, 2m \notin A$ 인 집합 A 를 하나 찾으시오. (5점)

문항 ③ (의예과)

1. 출제 의도

이 문제는 주어진 지문의 상황과 질문의 내용을 잘 이해하고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않게 해결할 수 있는 문제이다. 어려운 수학적 계산을 잘 하거나 함수 문제를 잘 푸는 학생들 중에도 가끔 아주 단순한 논리적 사고와 서술에는 약한 학생들이 많다. 논리적이고 합리적인 사고 능력을 키우고자 하는 것이 수학교육의 주요 목표이기 때문에 본 문제는 그러한 목표 추구에 부합하고자 만든 문제이다. 학교 교육 현장에서도 계산 중심의 수학 외에도 논리적 사고와 서술에 대한 교육이 중요하다는 인식이 확대되기를 기대한다.

2. 문항 해설

- 이 문제에서 물어 보는 내용이 무엇인지를 이해할 수 있고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않게 해결할 수 있는 문제이다.
- (3-1)은 i 와 $2m - i$ 가 둘 다 A 에 속하면 $i + (2m - i) + (-2m) = 0$ 이 되어 주어진 조건에 위배된다는 단순한 관찰을 할 수 있는지를 묻는 문제이다. 음수에서도 대칭적으로 성립한다.
- (3-2)는 경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외에도 $-2m \notin A, 2m \notin A$ 인 경우에 대하여도 수학적 귀납법을 이용하여 문제를 증명할 수 있는지, 그리고 나머지 경우들에도 같은 논리로 증명할 수 있는지를 묻고 있다. 이 문항은 우선, 경우를 4가지 경우로 나누어 따지고자 하는 것, 그리고 그 중에서도 특히 $-2k - 2 \in A, 2k + 2 \notin A$ 인 경우에 대하여 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 것이 핵심이 된다.
- (3-3)은 주어진 조건을 만족하면서 $n(A) = 2m$ 인 집합 A 의 실례를 찾는 문제이다. 이 문제 해결의 결과를 통하여 우리는 두 가지 사실을 알 수 있다. 첫째, 짝수 $2m$ 에 대하여 조건을 만족하는 집합 $n(A)$ 은 $2m$ 이하라는 것을 (3-2)에서 보였는데, 최댓값 $2m$ 을 갖는 예가 실제로 존재한다는 사실, 그리고 둘째는 짝수일 때만이 아니라 홀수 $2m - 1$ 인 경우에도 조건을 만족하는 집합 $n(A)$ 의 최댓값을 구할 수 있다는 것이고 그 값은 $2m$ 라는 사실이다.

3. 채점기준

- (3-1) • (a) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면 (5점)
- (b) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면 (5점)

(3-2) • 경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외의 3가지로 나누면 (3점)

• $-2k-2 \in A, 2k+2 \notin A$ 또는 $-2k-2 \notin A, 2k+2 \in A$ 경우에 증명하면 (7점)

• 나머지 경우에 대하여 증명을 마치면 (5점)

(3-3) • 올바를 예를 하나 찾아 서술하기만 하면 (5점)

4. 예시 답안

(3-1) (a) i 와 $2m-i$ 가 둘 다 A 의 원소라면 $-2m \in A$ 라는 가정으로부터 $i + (2m-i) + (-2m) = 0$ 이 되어 조건에 위배된다. 따라서 둘 다 A 의 원소일 수는 없다.

(b) $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 에 대하여 $-i$ 와 $-2m+i$ 도 동시에 A 에 속할 수 없으므로($\because 2m \in A$) 모두 $2m$ 개의 각 쌍에서 숫자 하나씩은 A 의 원소가 될 수 없다. 0도 빠지므로 A 의 원소는 많아야 $(4m+1) - (2m+1) = 2m$ 개이다.

(3-2) 우선, $m=1$ 일 때는 A 가 $\{-2, -1, 1, 2\}$ 중 3개의 원소를 포함한다면 주어진 조건을 만족하지 않으므로 A 의 원소는 2개 이하여야 한다. 이제, 수학적 귀납법에 따라 $m=k$ 일 때 성립한다고 가정하고 $k+1$ 일 때 성립함을 보이자. $-2k-2, 2k+2 \in A$ 인 경우는 3-1 (b)에서 증명하였다. 이제 다음과 같은 3가지 경우를 따져 보자.

(i) $-2k-2 \in A, 2k+2 \notin A$ 인 경우.

(i)-1: $2k+1 \notin A$ 이면, 집합 $A \cap \{-2k, -2k+1, \dots, 2k-1, 2k\}$ 은 수학적 귀납법의 가정에 의해 $2k$ 개 이하의 원소를 갖는다. 따라서 A 는 더 가질 수 있는 원소가 $-2k-2, -2k-1$ 뿐이므로 $2k+2$ 개 이하의 원소를 갖는다.

(i)-2: $2k+1 \in A$ 이면, 앞의 (3-1)과 같은 논법에 의해

◆ $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ 에 대하여 $i, 2(k+1)-i$ 중 하나는 A 에 속하지 않으므로($\because -2k-2 \in A$) $2(k+1)$ 개의 양의 정수 중 $k+1$ 개가 빠지고 또한 $2k+2 \notin A$ 이므로, 모두 $k+2$ 개가 빠진다. 따라서 양의 정수 중에서는 k 개 이하가 A 에 속한다.

◆ $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 에 대하여 $-i, (-2k+1)+i$ 중 하나는 A 에 속하지 않으므로($\because 2k+1 \in A$), 음의 정수 중에서 k 개가 빠지므로 음의 정수는 $k+2$ 개 이하가 A 에 속한다. 따라서 $n(A) \leq k + (k+2) = 2(k+1)$ 이다.

(ii) $-2k-2 \notin A, 2k+2 \in A$ 인 경우는 (ii)과 대칭적인 이유로 성립한다.

(iii) $-2k-2 \notin A, 2k+2 \notin A$ 인 경우, 앞의 (i)-1과 동일한 수학적 귀납법에 의해 $n(A) \leq 2k+2$ 이다.

(3-3) 모든 홀수들의 집합은 $2m$ 개의 원소로 이루어져 있고, 주어진 조건을 만족한다. 왜냐하면 세 홀수의 합이 0이 될 수는 없기 때문이다. 또 다른 예로는 $A = \{-2m+1, 2m+2, \dots, -m+1\} \cup \{m-1, m, m+1, \dots, 2m-1\}$ 가 있다.

2021학년도 논술고사 기출문제(자연) : 오후

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(이차방정식의 근의 판별) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때

(1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(1-1) 이차함수 $y = (x-p)^2 + p^2 + 2$ 의 그래프가 점 $(1, 7)$ 을 지나도록 하는 실수 p 의 값을 모두 구하시오. (5점)

(1-2) 점 (a, b) 에 대하여, 곡선 $y = (x-p)^2 + p^2 + 2$ 가 점 (a, b) 를 지나도록 하는 실수 p 가 존재할 때, a, b 가 만족하는 조건을 구하시오. (10점)

(1-3) 점 $(-12, -1)$ 로부터 곡선 $y = (x-p)^2 + p^2 + 2$ 위의 점까지의 거리 중 최솟값을 $f(p)$ 라고 하자. 함수 $f(p)$ 의 최솟값을 구하시오. (15점)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(사잇값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(2-1) $0 \leq t \leq 2\pi$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = 2\sin x$ 와 직선 $y = x - t$ 의 교점이 1개가 되도록 하는 t 의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(2-2) 양수 α 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족한다.

(i) $g(t)$ 는 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 연속이다.

(ii) $0 \leq t < 2\pi$ 인 모든 실수 t 에 대하여, $2\sin(g(t)) = g(t) - \alpha t$ 이다.

(a) $\alpha = 1$ 일 때, $k \leq g(0) < k+1$ 을 만족하는 정수 k 의 값을 구하시오. (10점)

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(t)$ 가 존재하도록 하는 α 의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. (15점)

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a < x < b)$$

가 성립한다. 그러므로 $a < c < b$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)dt = f(c)$$

가 성립한다.

(나) 0을 포함하는 열린구간 (a, b) 에서 두 번 미분가능한 함수 $g(x)$ 에 대하여

(i) 열린구간 $(0, b)$ 에서 $g''(x) < 0$ 이고 $g(0) = g'(0) = 0$ 이면 열린구간 $(0, b)$ 에서 $g(x) < 0$ 이다.

(ii) 열린구간 $(a, 0)$ 에서 $g''(x) < 0$ 이고 $g(0) = g'(0) = 0$ 이면 열린구간 $(a, 0)$ 에서 $g(x) < 0$ 이다.

(※) 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt \leq \frac{xf(x)}{2}$$

를 만족한다.

(3-1) 함수 $g(x) = \frac{xf(x)}{2} - \int_0^x f(t)dt$ 의 이계도함수 $g''(x)$ 를 $f(x)$ 를 이용하여 표현하시오. (8점)

(3-2) $f(0)$ 의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = (x^2 + px + q)e^x$ 으로 주어질 때, 상수 p, q 의 값을 구하시오. (17점)

문항 ①

1. 출제 의도

이 문항는 포물선이 한 점을 지날 조건을 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 연결시킬 수 있음을 평가하고자 하였다. 그리고 다항함수의 도함수를 분석하여 다항함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- (1-1) 주어진 점을 대입하여 얻은 이차방정식을 간단한 인수분해를 통하여 근을 구할 수 있다.
- (1-2) 포물선이 한 점을 지날 조건은 한 점이 함수 $y = (x-p)^2 + p^2 + 2$ 에 의해 주어지는 방정식을 만족한다는 것이다. 즉, p 가 실수로서 존재해야 하므로 이는 p 를 변수로 하는 이차방정식이 근을 가질 조건이다. 따라서 판별식이 0보다 크거나 같을 조건을 통해서 구할 수 있다.
- (1-3) (1-2)에서 구한 모든 (a, b) 와 $(-12, -1)$ 사이의 거리의 최솟값을 구하면 된다. 피타고라스 정리와 (1-2)의 부등식을 이용하면 최솟값이 될 함수 $\sqrt{(a+12)^2 + ((a^2+4)/2+1)^2}$ 를 찾을 수 있다. 여기서 얻어진 함수의 제곱은 다항함수가 된다. 이 다항함수의 도함수를 분석해보면 한 개의 0를 갖고 도함수의 부호가 음수에서 양수로 변하므로 함수의 증감에 의해 도함수가 0이 되는 점에서 거리의 최솟값을 갖는다.

3. 채점기준

- (1-1) • 점을 대입하여 이차방정식을 구함 (2점)
- 인수분해를 통하여 실수 p 값을 모두 구함 (3점)
- (1-2) • (a, b) 를 함수에 대입하여 (a, b) 가 만족하는 방정식을 인지함 (5점)
- 방정식을 p 에 대한 방정식으로 인지하여 판별식을 적용하여 조건을 구함 (5점)
- (1-3) • (1-2)의 부등식을 이용하여 거리의 최솟값이 될 함수를 찾음 (4점)
- 도함수를 이용하여 도함수가 0이 되는 점을 찾음 (4점)
- 도함수의 부호를 통하여 도함수가 0이 되는 점에서 최솟값을 가짐을 인지 (4점)
- 거리가 최소가 되는 점을 대입하여 거리를 구함 (3점)

4. 예시 답안

(1-1) 점 $(1, 7)$ 을 이차함수에 대입하여 얻은 방정식 $7 = (1 - p)^2 + p^2 + 2$ 의 해를 구하면 된다. $p = 2$ 또는 $p = -1$ 이 되어 $(-1, 3), (2, 6)$ 이 구하고자 하는 점이다.

(1-2) 이차함수 $y = (x - p)^2 + p^2 + 2$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $b = (a - p)^2 + p^2 + 2$ 을 만족하는 실수 p 가 존재한다. 방정식을 p 에 대해서 정리하면 $2p^2 - 2ap + a^2 - b + 2 = 0$. 실근이 존재하기 위해서는 제시문에 의해 $D = a^2 - 2(a^2 - b + 2) \geq 0$ 가 된다. 따라서 $b \geq (a^2 + 4)/2$.

(1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a, b) 를 지나는 이차함수 $y = (x - p)^2 + p^2 + 2$ 의 그래프가 존재하는 모든 점 (a, b) 에 대해서 $(-12, -1)$ 로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2 + (b+1)^2}$ 중 최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a, b 의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \geq (a^2 + 4)/2$ 를 만족한다. 따라서 $b + 1 \geq (a^2 + 4)/2 + 1 > 0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2 + (b+1)^2} \geq \sqrt{(a+12)^2 + ((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 성립하고 따라서 $\sqrt{(a+12)^2 + ((a^2+4)/2+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면 된다.

함수 $f(a) = (a+12)^2 + ((a^2+4)/2+1)^2$ 의 도함수는 $f'(a) = a^3 + 8a + 24 = (a^2 - 2a + 12)(a + 2)$ 이고

$a^2 - 2a + 12 = (a - 1)^2 + 11 > 0$ 이므로 $a < -2$ 에서는 $f'(a) < 0$ 이고 $a > -2$ 에서는 $f'(a) > 0$ 이므로 $a = -2$ 에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 구하고자 하는 거리는 $(10^2 + 25)^{1/2} = \sqrt{125}$ 가 된다.

별해 (1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a, b) 를 지나는 이차함수 $y = (x - p)^2 + p^2 + 2$ 의 그래프가 존재하는 모든 점 (a, b) 에 대해서 $(-12, -1)$ 로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2 + (b+1)^2}$ 중 최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a, b 의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \geq (a^2 + 4)/2$ 를 만족한다. 따라서 $b + 1 \geq (a^2 + 4)/2 + 1 > 0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2 + (b+1)^2} \geq \sqrt{(a+12)^2 + ((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 된다. 따라서 $b = (a^2 + 4)/2$ 를 만족하는 (a, b) 에서 $(-12, -1)$ 까지의 거리 중 최솟값을 구하면 된다.

$y = (x^2 + 4)/2$ 위의 한 점 (a, b) 에서의 법선의 방정식은 $y = -\frac{1}{a}(x - a) + \frac{a^2 + 4}{2}$ 가 된다. 거리가 최소가 될 때는 이 법선이 $(-12, -1)$ 을 지날 때이므로 대입하여 방정식을 정리하면 $(a + 2)(a^2 - 2a + 12) = 0$ 이 되어 $a = -2$ 일 때 $(-12, -1)$ 과의 거리가 최소가 된다. 이 때 거리는 $\sqrt{125}$ 가 된다.

문항 ②

1. 출제 의도

삼각함수의 그래프의 개형과 접선의 방정식을 이해하고 있는지 평가하고, 사이값 정리를 이용하여 연속함수의 성질을 파악할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

- (2-1) 문항은 삼각함수의 개형을 그릴 수 있고 주어진 조건이 $y = 2\sin x$ 에서 기울기가 1인 접선과 관계가 있다는 것을 파악할 수 있는지 평가한다.
- (2-2) 문항은 주어진 조건을 (2-1)과 같이 직선과 $y = 2\sin x$ 의 교점의 x 좌표로 해석해 내고, 사이값 정리를 이용해서 교점의 위치를 파악하고 연속함수 여부를 판단할 수 있는지 평가한다. 실제로 (2-2)문항의 발문 형태는 올해 본고의 모의논술과 매우 유사하게 출제하여서 모의논술을 참고해서 시험준비를 한 수험생들이 익숙한 느낌을 가질 수 있도록 하였다.

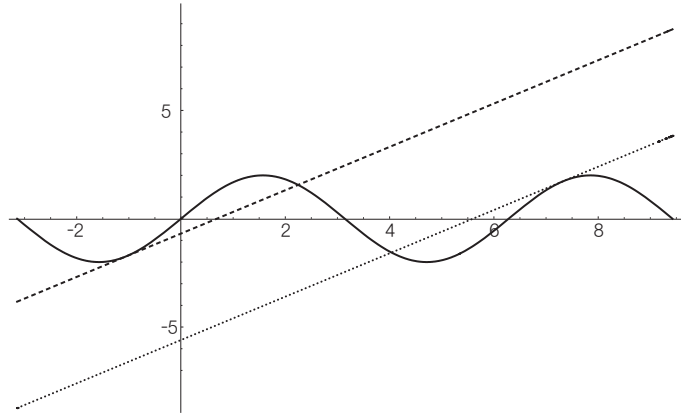
3. 채점기준

- (2-1) • 직선 $y = x - t$ 가 곡선 $y = 2\sin x$ 와 접하는 조건을 구하면 (5점)
- 실제로 t 의 범위를 정확히 계산하면 (5점)
- (2-2) • (a) $g(t)$ 가 직선 $y = 2\sin x$ 와 $y = x - t$ 의 교점의 x 좌표임을 파악하면 (2점)
- $g(t)$ 가 연속함수라는 사실과 사이값의 정리를 이용해서 $g(0)$ 이 양수여야 한다는 사실을 파악하면 (4점)
 - 실제로 $g(0)$ 의 정수부분을 사이값의 정리를 이용해서 정확히 구하면 (4점)
- (2-2) • (b) 그래프의 개형을 이용하여 α 가 $y = x - 2\pi\alpha$ 가 $y = 2\sin x$ 에서 $x = \frac{5\pi}{3}$ 에서 접하게 하는 값 또는 이보다 작은 값에서는 $g(x)$ 가 $[0, 2\pi)$ 에서 연속이고, 이보다 큰 값에서는 $g(x)$ 가 $[0, 2\pi)$ 에서 연속함수가 될 수 없음을 설명하면 (10점) (단, 엄밀한 증명은 제시하지 않아도 되고, 직관적으로 그래프의 개형을 이용해서 개략적인 설명을 하면 충분함.)
- 조건을 만족하는 α 의 값을 정확히 계산하면 (5점)

4. 예시 답안

(2-1) $y = 2\sin x$ 함수의 그래프의 개형으로부터 구하려는 t 는 직선 $y = x - t$ 가

곡선 $y = 2\sin x$ 와 $-\pi < x < 0$ 에서 접할 때와 $2\pi < x < 3\pi$ 에서 접할 때의 사이에 있는 경우이다.



함수 $y = 2\sin x$ 의 도함수는 $y' = 2\cos x$ 이므로, 구하려는 접하는 점은 $(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3})$ 과 $(\frac{7\pi}{3}, \sqrt{3})$ 이다. 따라서 구하려는 t 의 범위는 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$ 이다.

(2-2) (a) $0 \leq t \leq 2\pi$ 일 때 $(g(t), 2\text{sing}(t))$ 는 두 곡선 $y = 2\sin x$ 와 $y = x - t$ 의 교점이다.

$g(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $2\sin x = x$ 인 x 의 값으로 각각 음수, 0, 양수인 세 개의 실수이다. 그런데, (2-1)의 결과에서 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$ 일 때, 그래프의 개형을 보면 $g(t)$ 는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 큰 양수 값을 가져야 한다.

만일 $g(0) \leq 0$ 이었다면 사잇값의 정리로부터 예를 들어 $g(t) = \frac{\pi}{2}$ 인 t 의 값이 존재해야 하는데, $t > 0$ 인 범위에서 직선 $y = x - t$ 와 곡선 $y = 2\sin x$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$ 가 될 수는 없다. 따라서 $g(0)$ 은 양수 이어야 한다.

이때 $2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2 > \frac{\pi}{2}$ 이고 $2\sin(2) < 2$ 이므로, $1 < \frac{\pi}{2} < g(0) < 2$ 이고, 따라서 $k = 1$ 이다.

(다른 방법: $2\sin(\frac{5\pi}{8}) = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \frac{15}{8}$ 이다. 마지막 부등식은 양변을 제곱하면

즉 $2 + \sqrt{2} < \frac{225}{64} \approx \sqrt{2} < \frac{97}{64}$ 임을 보이면 되는데, $1.5 = \frac{96}{64} < \frac{97}{64}$ 이고, $2 < 1.5^2 = 2.25$ 이므로 성립한다.

따라서 $2\sin(\frac{5\pi}{8}) < \frac{5\pi}{8}$ 이므로, $g(0) < \frac{5\pi}{8} < 2$ 이다.)

(b) $(g(t), 2\text{sing}(t))$ 는 두 곡선 $y = 2\sin x$ 와 의 교점이다. $0 \leq t < 2\pi$ 이면, $0 \leq \alpha t < 2\pi\alpha$ 이다.

$2\pi\alpha$ 가 직선 $y = x - 2\pi\alpha$ 가 곡선 $y = 2\sin(x)$ 에서 $x = \frac{5\pi}{3}$ 에서 접하게 하는 $2\pi\alpha$ 의 값인

$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ 보다 작거나 같으면, 즉 $\alpha \leq \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 이면 $g(t)$ 는 $\frac{\pi}{2} < g(t) < \frac{5}{3}\pi$ 범위에서 연속함수로 정의할 수 있다. 이는 그래프의 개형으로부터 직관적으로 설명된다.

$\alpha > \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 이라면, 그래프의 개형과 사잇값의 정리로부터 $\alpha t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$ 인 경우 $g(t) < 2\pi$ 이고

$\alpha t > \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ 인 경우 $g(t) > 2\pi$ 이어야 하는데, $g(t)$ 가 $y = 2\sin x$ 와 $y = x - \alpha t$ 의 교점의 x 좌표가 되도록 연속

적으로 만들 방법이 없다. 그러므로 조건을 만족하는 α 의 최댓값은 $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 이다.

[참고1] 실제로 $\alpha = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $g(t)$ 는 $0 \leq t < 2\pi$ 일 때, $\frac{\pi}{2} < g(t) < \frac{5}{3}\pi$ 이고

$2\text{sing}(g(t)) = g(t) - \alpha t$ 가 되도록 잡았을 때 $g(t)$ 가 주어진 구간에서 연속이라는 사실은 다음과 같이 엄밀하게 증명할 수 있다.

a 와 t 를 $0 \leq a, t < 2\pi$ 인 임의의 두 실수 (단, $t \neq a$)라고 하면,

$2\text{sing}(t) = g(t) - \alpha t$, $2\text{sing}(a) = g(a) - \alpha a$ 이므로

$g(t) - g(a) - 2(\text{sing}(t) - \text{sing}(a)) = \alpha(t - a)$ 이고

평균값의 정리에 의해 $2\text{sing}(t) - 2\text{sing}(a) = 2\cos x ((g(t) - g(a)))$ 인 x (x 는 $g(a), g(t)$ 사이의 실수)가 존

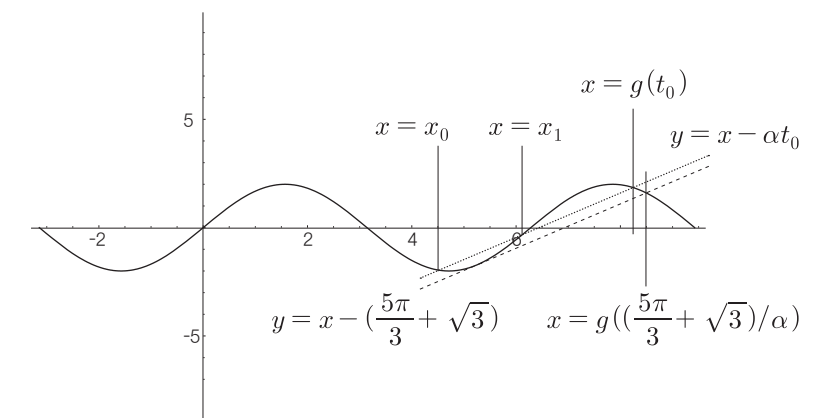
재한다. $\cos x < \frac{1}{2}$ 이므로, $g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1 + 2\cos x}(t - a)$ (x 는 $g(a), g(t)$ 사이의 실수)이다. 따라서

$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1 + 2\cos a} \lim_{t \rightarrow a} (t - a) = g(a)$ 이다.

[참고2] $\alpha > \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 이라면, $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha)$ 은 두 곡선 $y = 2\sin x$ 와 $y = x - (\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})$ 의 교점의 x 좌표이고, 각각 2π 보다 작거나 큰 두 개의 실수 값 중의 하나이다. (a)에서와 같은 방법으로 사잇값의 정리에 의하여

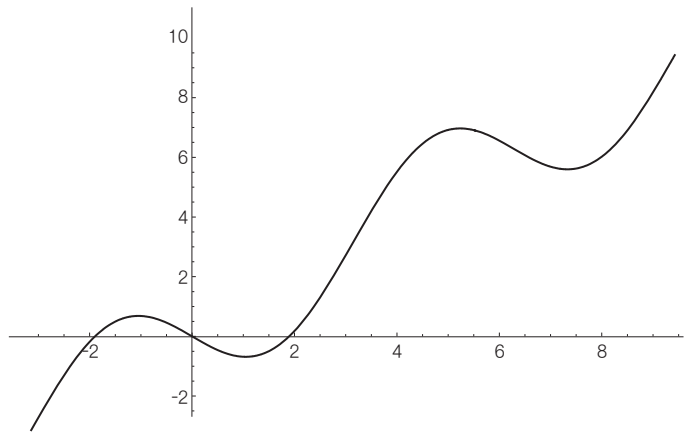
$g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) < 2\pi$ 인 경우 모순이므로 $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) > 2\pi$ 이다. $g(t)$ 의 연속성에 의해

$t_0 < (\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3})/\alpha$ 이고, t 가 구간 $[t_0, (\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi})/\alpha]$ 에 속할 때 $g(t) > 2\pi$ 인 t_0 값이 존재한다.

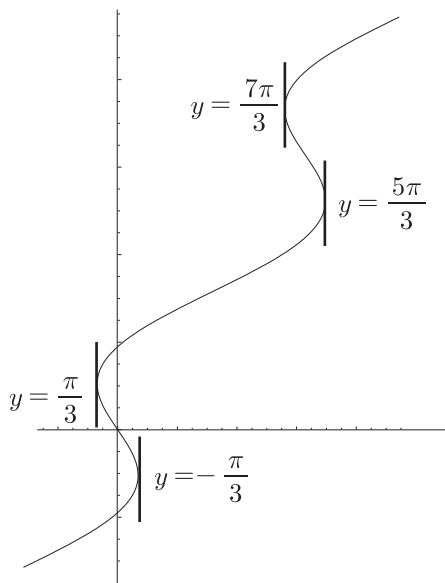


그렇게 되면, 함수 $g(t)$ ($0 \leq t < 2\pi$)의 치역에서 제외되는 구간 (x_0, x_1) ($\pi < x_0 < x_1 < 2\pi$)이 존재하므로, 사잇값의 정리에 의해 $g(t)$ 의 연속성에 모순이다.

[별해] (2-1) $f(x) = x - 2\sin x$ 의 미분계수 $f'(x) = 1 - 2\cos x$ 가 0이 되는 점 $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ 중에서 $x = -\frac{\pi}{3}$ 와 $x = \frac{7\pi}{3}$ 에서의 함숫값 사이에 t 가 있을 때 방정식 $t = x - 2\sin x$ 가 해를 1개 갖는다.
 $f(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}, f(\frac{7\pi}{3}) = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$ 이므로, 구하려는 t 의 범위는 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$ 이다.

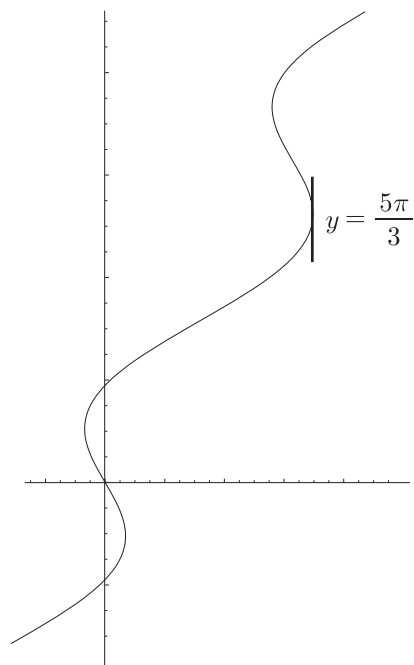


(2-2) (a) $f(x) = x - 2\sin x$ 라고 하면 조건에서 $f(g(t)) = t$ 이고 $g(t)$ 는 $[0, 2\pi)$ 에서 연속이다.



조건의 등식이 성립할 필요충분조건은 $y = g(x)$ 의 그래프가 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대칭이동시킨 곡선 $x = f(y)$ (위 그림)의 부분집합이 되는 것이다. $y = g(x)$ 는 $[0, \pi)$ 에서 연속함수가 되어야 하므로, $g(0) > 0$ 이고, 원래의 예시답안에서와 같이 사잇값의 정리를 이용하여 $g(0)$ 의 정수부분이 1임을 확인할 수 있다.

(b) $f(x) = \frac{x - 2\sin x}{\alpha}$ 라고 하면 $g(x)$ 는 $[0, 2\pi)$ 에서 연속함수여야 하므로, $x = f(y)$ 의 그래프에 접하는 직선이 y 축에 평행이 되도록 하는 y 값 $y = \frac{5\pi}{3}$ 을 갖는 $x = f(y)$ 위의 점의 x 좌표가 2π 가 될 때 α 가 최대가 된다.
 즉, α 가 최대일 때 $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3}}{\alpha} = 2\pi$ 이고, $\alpha = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 이다.



문항 ③

1. 출제 의도

정적분과 미분의 관계를 활용하여 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다. 이계도함수를 계산하고 이를 이용하여 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

- (3-1) 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다.
- (3-2) 정적분과 미분의 관계, 미분의 정의를 이용하여 정적분으로 주어진 함수의 미분계수를 계산할 수 있는지를 평가한다.
- (3-3) 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 주어진 부등식의 의미를 이해할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점기준

(3-1) • $g'(x)$ 을 계산함. (5점)

$$\bullet g''(x) = \frac{xf''(x)}{2} \text{임을 보임. (3점)}$$

(3-2) • $f(0) \leq 0$ 임을 보임. (5점)

$$\bullet f(0) \geq 0 \text{임을 보임. (5점)}$$

(3-3) • $x > 0$ 일 때 주어진 조건을 이용하여 $f''(0) \geq 0$ 임을 보임. (7점)

$$\bullet x < 0 \text{일 때 주어진 조건을 이용하여 } f''(0) \leq 0 \text{임을 보임. (7점)}$$

$$\bullet p = -1, q = 0 \text{임을 보이고 } f(x) = (x^2 - x)e^x \text{이 주어진 조건을 만족함을 보임. (3점)}$$

4. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)의 미분과 적분과의 관계를 이용하면

$$g'(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{2} - f(x) = \frac{-f(x) + xf'(x)}{2}$$

$$\text{이다. 그러므로 } g''(x) = \frac{xf''(x)}{2} \text{이다.}$$

(3-2) $x > 0$ 이면 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \leq \frac{f(x)}{2}$ 이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \leq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0) \leq 0$ 이다.

2021학년도 논술우수자 입시결과

$x < 0$ 이면 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq \frac{f(x)}{2}$ 이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0) \geq 0$ 이다.

따라서 $f(0) = 0$ 이다.

(3-3) $f(0) = 0$ 이므로 $q = 0$ 이다. 그러므로

$$f'(x) = (x^2 + (p+2)x + p)e^x, f''(x) = (x^2 + (p+4)x + 2p+2)e^x$$

이다.

만약 $f''(0) < 0$ 이면 0을 포함하는 어떤 구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이다.

1), 2)의 결과에 의해 $g(0) = g'(0) = 0$ 이고 구간 $(0, b)$ 에서 $g''(x) < 0$ 이므로 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0, b)$ 에서 $g(x) < 0$ 이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

만약 $f''(0) > 0$ 이면 을 포함하는 어떤 구간 (a, b) 에서 $f''(x) > 0$ 이다.

1), 2)의 결과에 의해 $g(0) = g'(0) = 0$ 이고 구간 $(a, 0)$ 에서 $g''(x) < 0$ 이므로 제시문 (나)로부터 구간 $(a, 0)$ 에서 $g(x) < 0$ 이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $f''(0) = 0$ 이고 $p = -1$ 이다.

위에서 구한 $f(x) = (x^2 - x)e^x$ 는 $f''(x) = (x^2 + 3x)e^x$ 을 만족한다. 그러므로 $g''(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2)e^x$ 이고 $g'(x) = \frac{1}{2}x^3e^x$ 이다. 따라서 $x > 0$ 일 때 $g'(x) > 0$ 이고 $x < 0$ 일 때 $g'(x) < 0$ 이므로 $g(x) \geq g(0) = 0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 은 주어진 조건을 만족한다.

(혹은, 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $-g(x)$ 에 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0, \infty)$ 에서 $-g(x) < 0$ 이다. $x < 0$ 일 때 원점과 점 $(x, f(x))$ 를 잇는 선분은 $y = f(x)$ 의 그래프의 아래쪽에 있다. 즉, $x \leq t \leq 0$ 일 때

$f(t) \geq \frac{f(x)}{x}t$ 이다. 그러므로

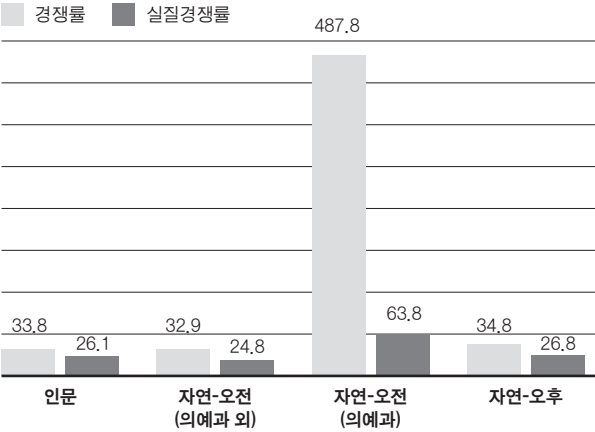
$$\int_x^0 f(t)dt > \int_x^0 \frac{f(x)}{x}t dt = -\frac{xf(x)}{2}$$

이다. 즉, $x < 0$ 일 때 $g(x) > 0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 은 주어진 조건을 만족한다.)

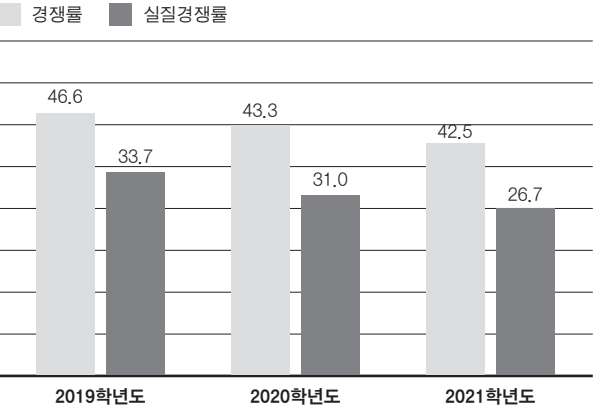
2021학년도 논술성적 및 학생부교과 입시결과

• 본 입시결과는 2022학년도 수시모집 지원을 위한 참고자료일 뿐이며, 2022학년도 입시결과는 달라질 수 있음을 유념하시기 바랍니다.

2021학년도 계열별/시험유형별 경쟁률

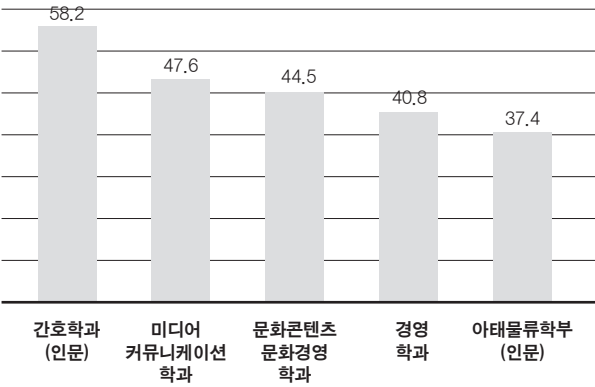


최근 3개년 논술우수자 전형 경쟁률 및 실질경쟁률 추이

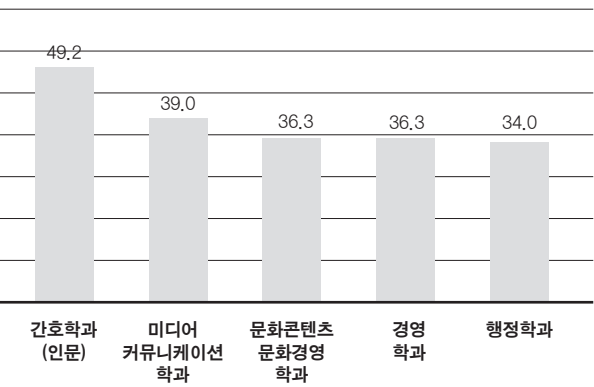


최근 2개년 계열별 경쟁률 Top5 모집단위

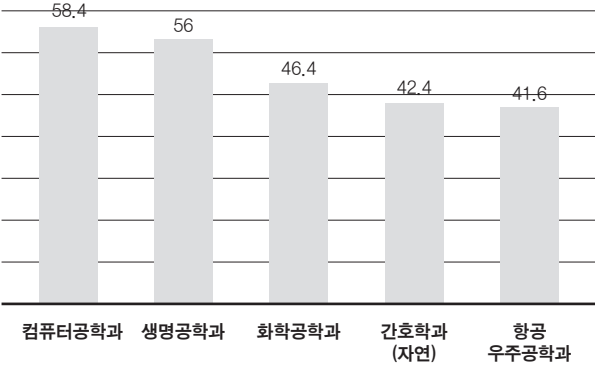
인문 : 2020학년도



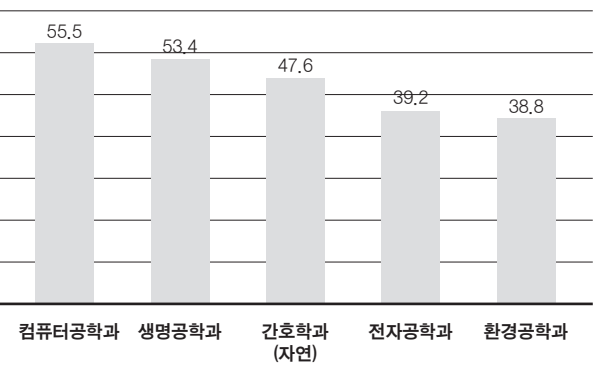
인문 : 2021학년도



자연 (의예과 제외) : 2020학년도



자연 (의예과 제외) : 2021학년도



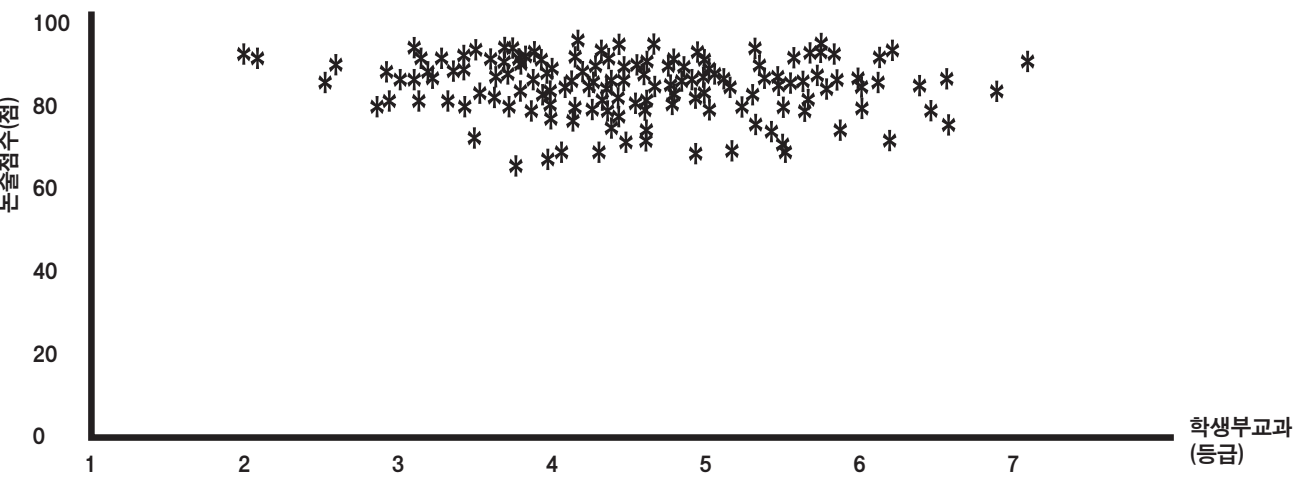
- 본 입시결과는 2021학년도 논술우수자 최종등록자 기준 평균, 최저점입니다.
- 본 자료에서의 학생부교과 점수는 수험생의 이해를 돕기 위하여 학년별 가중치를 적용하지 않은 단순 평균, 최저점입니다. (이수단위 반영, 학년별 가중치 미반영)

① 인문

2021학년도 논술우수자 인문 입시결과(종합)

문제유형	모집인원	지원인원	경쟁률	실질 경쟁률	논술점수		학생부교과	
					평균	최저	평균	최저
인문	205	6,927	33.8	26.1	4.38	6.56	83.82	65.50

2021학년도 논술우수자 인문 최종등록자 학생부교과 및 논술점수 분포도



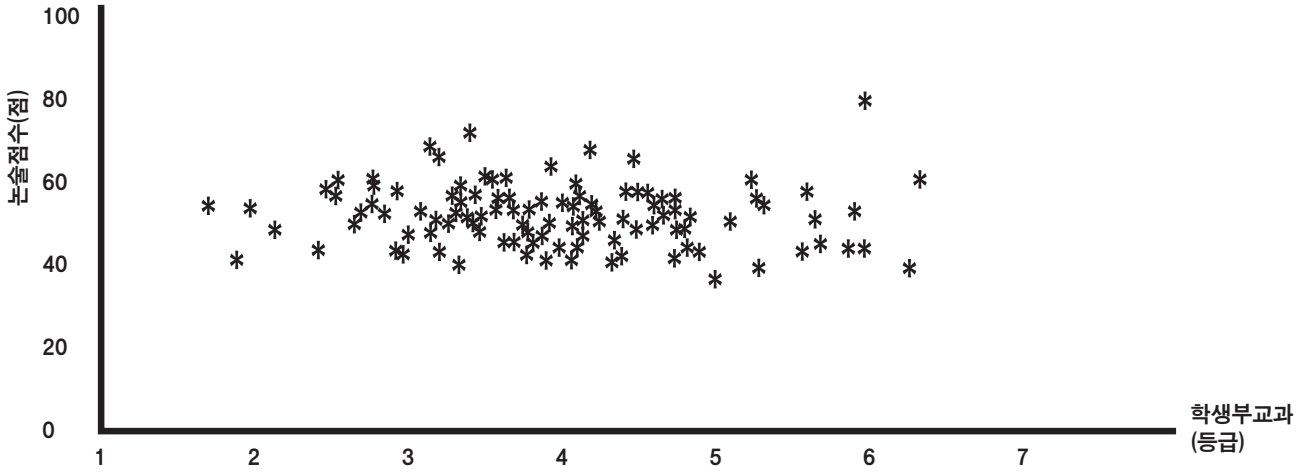
모집단위	모집 인원	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	최종 추가합격자 예비번호	논술점수		학생부교과	
						평균	최저	평균	최저
경영학과	36	36.3	27.3	86.1%	4	86.69	83.00	4.40	5.46
글로벌금융학과(인문)	2	31.0	21.5	100.0%	0	84.25	78.50	5.68	5.74
아태물류학부(인문)	23	33.4	26.0	87.0%	3	87.72	83.50	4.05	5.33
국제통상학과	18	30.3	24.2	83.3%	3	71.78	65.50	4.50	6.10
국어교육과	5	31.8	23.8	80.0%	1	90.80	89.50	3.54	3.78
사회교육과	3	31.3	22.7	66.7%	1	86.67	84.00	5.76	5.80
행정학과	12	34.0	26.1	75.0%	3	85.00	81.00	4.70	6.56
정치외교학과	7	31.3	25.6	100.0%	0	81.64	78.00	4.49	5.31
미디어커뮤니케이션학과	12	39.0	29.6	91.7%	1	90.00	88.50	4.30	5.39
경제학과	17	30.8	22.7	82.4%	4	82.44	79.00	4.60	6.10
한국어문학과	8	29.4	24.5	75.0%	2	78.06	71.00	4.51	6.00
사학과	9	28.1	23.0	77.8%	1	87.50	82.50	4.00	5.14
철학과	5	27.6	20.6	100.0%	0	88.20	83.50	3.86	4.40
중국학과	4	27.0	20.5	75.0%	1	74.50	71.00	4.78	5.77
일본언어문화학과	12	30.8	26.3	83.3%	2	80.58	75.50	4.39	6.38
영어영문학과	9	29.8	23.7	88.9%	1	86.39	83.00	4.56	5.47
문화콘텐츠문화경영학과	10	36.3	28.1	90.0%	1	79.85	76.00	4.31	4.77
간호학과(인문)	13	49.2	37.2	76.9%	3	85.31	81.50	4.22	5.60

② 자연 - [오전(의예과 외)]

2021학년도 논술우수자 자연(오전-의예과 외) 입시결과(종합)

계열	문제유형	모집인원	지원인원	경쟁률	실질 경쟁률	논술점수		학생부교과	
						평균	최저	평균	최저
자연	오전(의예과 외)	144	4,740	32.9	24.8	4.04	6.08	50.10	34.00

2021학년도 논술우수자 자연(오전-의예과 외) 최종등록자 학생부교과 및 논술점수 분포도



모집단위	모집 인원	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	최종 추가합격자 예비번호	논술점수		학생부교과	
						평균	최저	평균	최저
전기공학과	20	32.0	24.4	75.0%	7	52.97	46.50	3.97	5.16
전자공학과	21	39.2	28.2	61.9%	12	53.69	49.00	3.78	5.19
컴퓨터공학과	21	55.5	40.3	71.4%	6	57.90	49.00	4.11	6.08
정보통신공학과	12	32.6	26.7	66.7%	4	47.05	42.50	4.03	4.73
수학과	9	20.8	16.6	44.4%	6	54.78	49.50	3.69	4.58
통계학과	9	23.4	17.7	55.6%	6	44.83	38.00	4.21	5.51
물리학과	9	17.6	13.0	55.6%	4	41.78	38.50	3.98	5.02
화학과	7	23.3	19.0	85.7%	1	45.36	38.50	4.35	5.46
해양과학과	5	21.8	17.8	80.0%	3	40.60	37.00	5.48	6.02
식품영양학과	3	25.7	19.3	100.0%	0	49.00	47.50	4.10	4.62
글로벌금융학과(자연)	3	18.3	13.0	66.7%	2	44.33	34.00	4.90	5.48
아태물류학부(자연)	9	18.6	15.9	88.9%	1	44.33	40.50	3.92	5.02
수학교육과	7	23.6	17.4	57.1%	2	47.08	45.50	3.45	3.86
간호학과(자연)	9	47.6	35.8	44.4%	6	49.06	44.00	4.02	5.72

③ 자연 - [오전(의예과)]

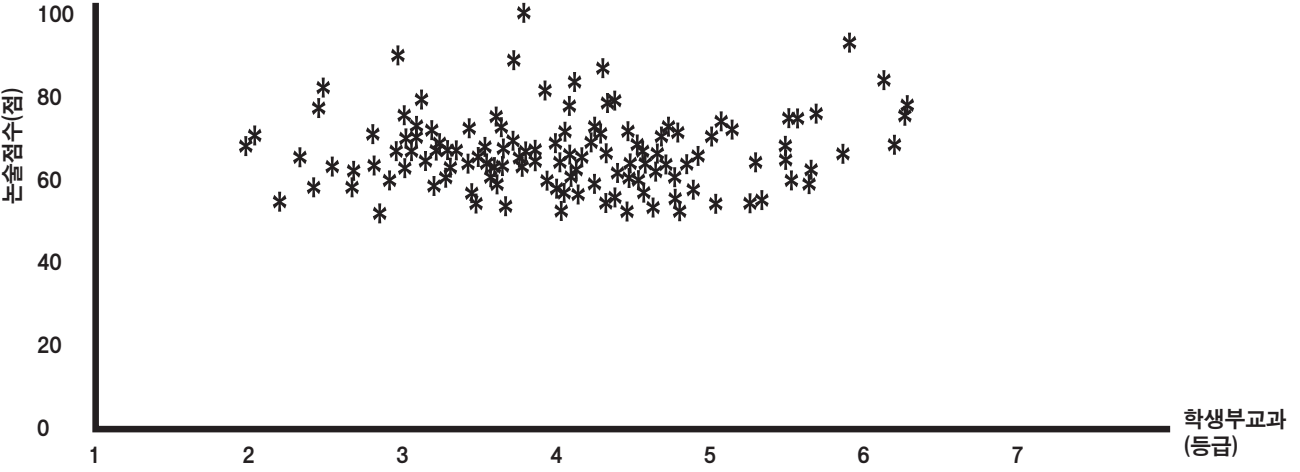
모집단위	모집 인원	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	최종 추가합격자 예비번호	논술점수		내신등급	
						평균	최저	평균	최저
의예과	10	487.8	63.8	80.0%	2	80.95	78.00	2.24	2.81

④ 자연 - [오후]

2021학년도 논술우수자 자연(오후) 입시결과(종합)

계열	문제유형	모집인원	지원인원	경쟁률	실질 경쟁률	논술점수		학생부교과	
						평균	최저	평균	최저
자연	오후	170	5,919	34.8	26.8	4.03	6.27	53.78	41.00

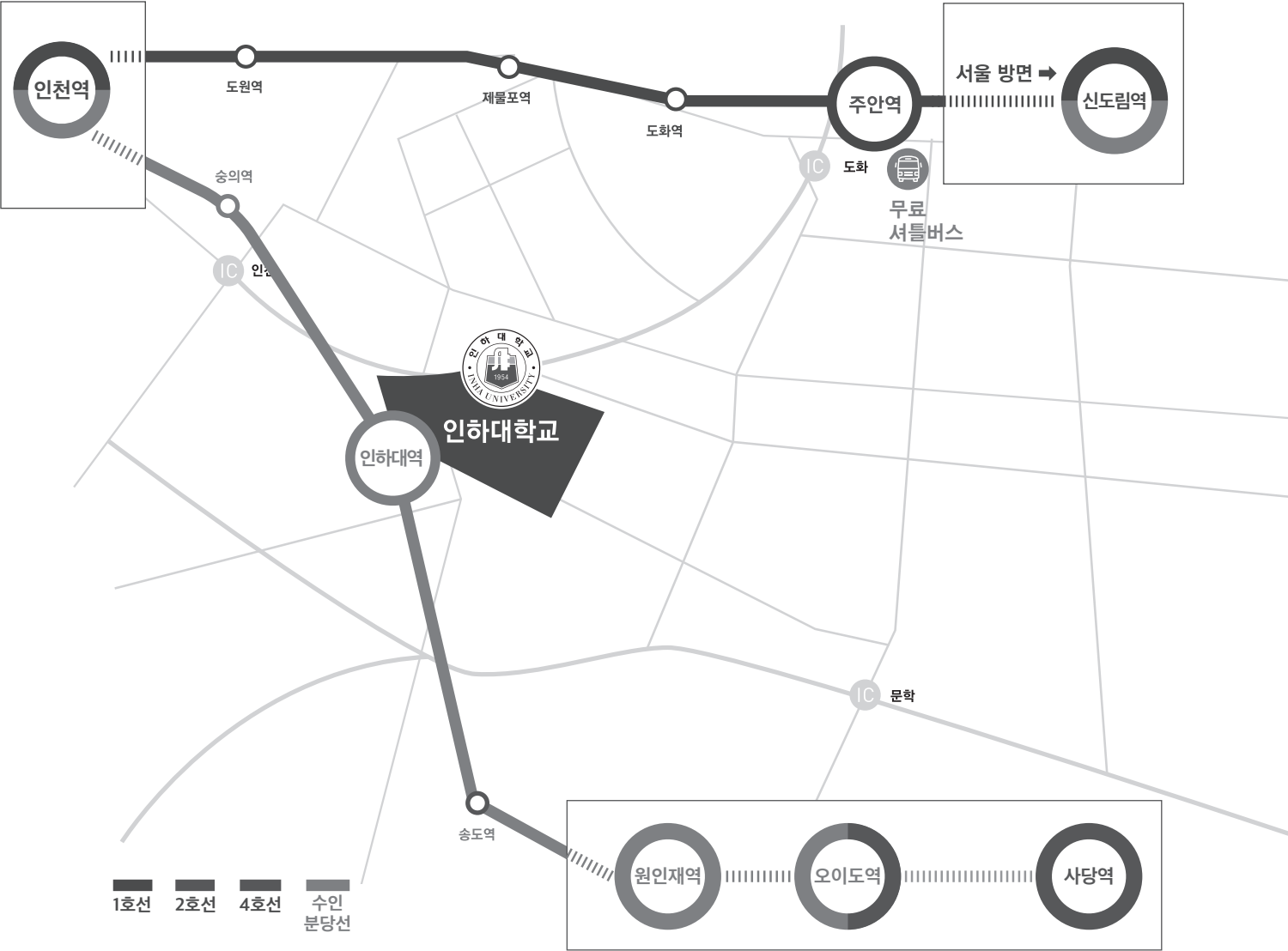
2021학년도 논술우수자 자연(오후) 최종등록자 학생부교과 및 논술점수 분포도



모집단위	모집 인원	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	최종 추가합격자 예비번호	논술점수		학생부교과	
						평균	최저	평균	최저
기계공학과	36	38.3	28.4	77.8%	8	58.17	51.00	3.94	6.26
항공우주공학과	12	34.4	26.8	75.0%	3	55.46	51.00	4.03	6.18
조선해양공학과	13	26.4	21.3	69.2%	5	47.50	43.00	4.34	5.57
산업경영공학과	12	34.3	26.3	83.3%	4	51.25	44.50	4.44	5.55
화학공학과	24	37.4	27.9	75.0%	7	58.00	52.00	3.56	5.03
생명공학과	8	53.4	38.9	75.0%	2	53.50	50.00	4.27	5.66
고분자공학과	11	28.2	22.7	81.8%	2	49.09	45.00	3.53	4.52
신소재공학과	18	35.4	27.8	55.6%	11	57.44	50.50	4.29	6.27
환경공학과	5	38.8	30.6	80.0%	1	45.60	42.50	4.79	5.27
공간정보공학과(자연)	5	27.2	21.8	100.0%	0	49.20	47.00	4.28	5.86
건축학부	20	31.2	25.6	70.0%	6	50.50	46.50	4.06	5.64
에너지자원공학과	6	24.8	20.7	83.3%	1	45.67	41.00	3.70	4.49

오시는 길

22212 인천광역시 미추홀구 인하로 100 인하대학교



전철 1호선
주안역 ▶ 마을버스 511번 / 시내버스 5-1, 13번
제물포역 ▶ 마을버스 512번

수인분당선
인하대역 ▶ 수원~오이도~인하대학교/
4호선 사당~오이도(수인분당선 환승)~인하대학교

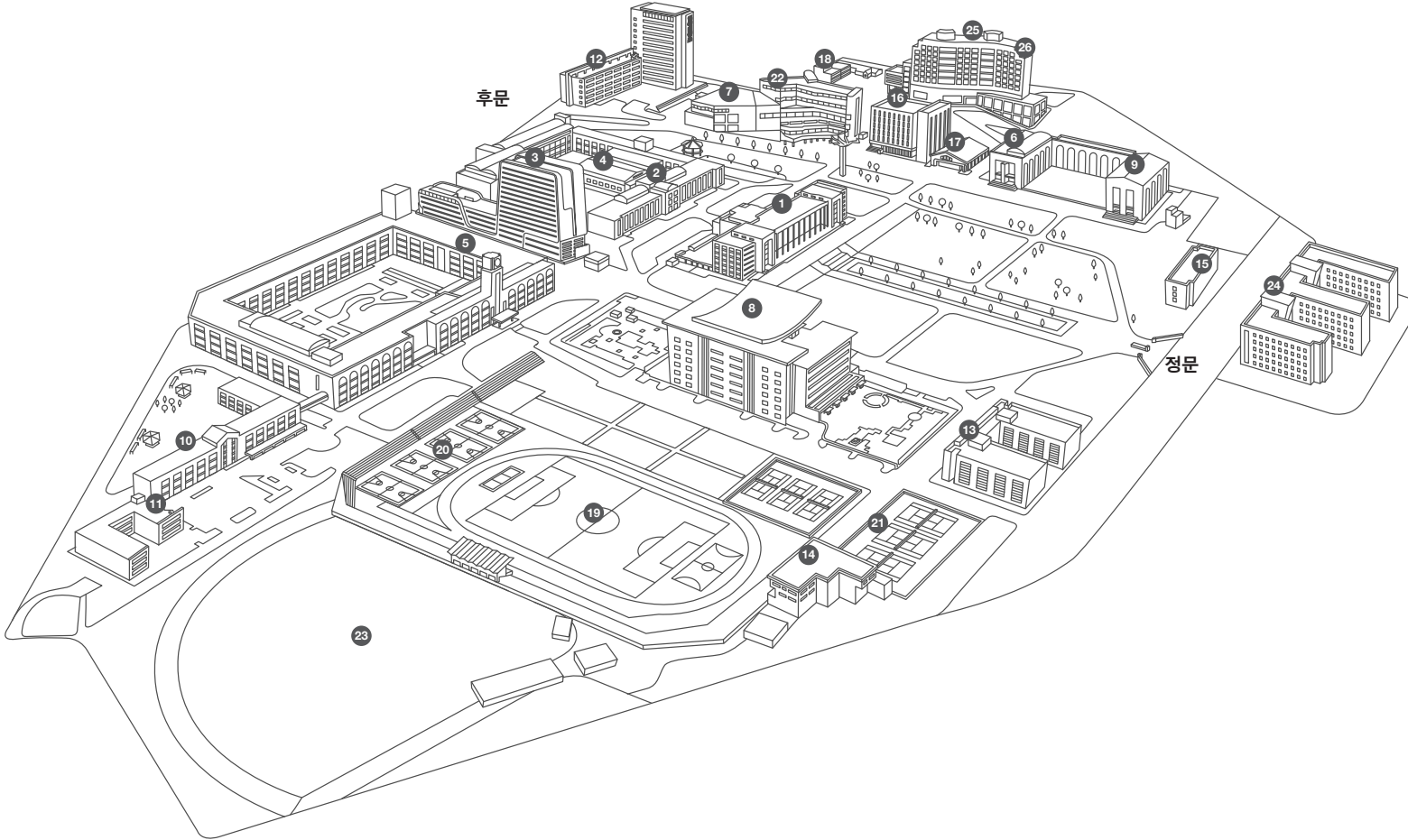
버스
서초역·강남역·양재역·선바위역 ▶ 9200번
광명역·석수역 ▶ 3001번
신촌역·서울역 ▶ 1601번
인천터미널(구월동) ▶ 908번

통학버스
• 서울 및 수도권 지역과 인하대학교를 잇는 통학버스가 준비되어 있습니다.
운행노선 ▶ 신촌/목동, 일산, 잠실, 가양, 분당, 안양, 수원, 김포, 강남, 강북

• 무료셔틀버스: 대중교통을 이용하는 경우, 무료셔틀버스(월~금)가 운행됩니다.
주안역 승차위치 ▶ 주안역 2번 출구 남광장 왼쪽(한국고시학원 방향)

상기 교통정보는 본교 운영 방침에 따라 변경될 수 있습니다.

캠퍼스 안내



- | | | |
|-------------|----------------|------------------|
| 1 1호관 (본관) | 11 나빌레관 | 21 테니스장 |
| 2 2호관 | 12 하이테크센터 | 22 C호관 |
| 3 60주년기념관 | 13 로스쿨관 | 23 비룡주차장 |
| 4 4호관 | 14 학생군사교육단 | 24 제1생활관(웅비재) |
| 5 5호관 | 15 미래융합대학관 | 25 제2생활관(비룡재) |
| 6 6호관 | 16 김현태 인하드림센터 | 26 제3생활관(게스트하우스) |
| 7 7호관(학생회관) | 17 체육관 | |
| 8 정석학술정보관 | 18 인하드림센터 2·3관 | |
| 9 9호관 | 19 대운동장 | |
| 10 서호관 | 20 농구장 | |



2022학년도 **논술** 가이드북



인하대학교

22212 인천광역시 미추홀구 인하로 100 인하대학교

입학팀 <http://admission.inha.ac.kr>

032-860-7221~2



인하대학교 입학처