한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자연 계열

모 의 논 술

수험번호 (   )   성명 (   )

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ (L, M은 실수)일 때, a가 아니면서 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \le g(x)$이면 $L \le M$

② $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $L = M$이면, $\lim_{x \to a} h(x) = L$

(나) 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \left(단, \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

(다) 연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)\,dx = n\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

1. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 을 구하시오.

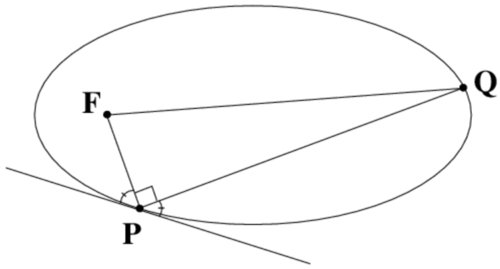
2. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \left(\frac{k}{n} - x\right)dx\right]$ 와 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4 \left(\frac{k}{n} - x\right)dx\right]$ 을 구하시오.

3. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx\right]$ 을 구하시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2] **다음 물음에 답하시오. (50점)**

1. 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원 모양의 당구대 위의 한 초점 F에 공이 놓여 있다. 이 공을 쳤을 때 그림과 같이 공은 타원 둘레의 점 P를 지나 점 Q에 닿았다. 이때 점 F, P를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각과 점 P, Q를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각은 서로 같다.



$\angle \mathrm{FPQ} = \dfrac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이를 구하시오.

2. 다항함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=4$, $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{f(x)}=-\frac{1}{7}$을 만족시킬 때, $-2\le t\le 2$인 t에 대하여 $g(t)=\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$라 하자. $g(t)$의 최솟값을 구하시오.

3. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x = 2\cos t,\quad y=\sin t$$

일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력을 $f(t)$, 가속도의 크기를 $g(t)$라 하자. $0\le t\le 2$인 t에 대하여 $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.