2022학년도 인하대학교 논술 모의고사 해설

[문항 1]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	사인법칙, 코사인법칙, 극한, 음함수 미분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 출제 의도

삼각형에 관련된 사인법칙, 코사인법칙 등 기본적인 성질들을 비롯하여 더 나아가 삼각함수의 미분에 관련된 내용을 숙지하고 있는지를 종합적으로 확인하는 문제이다. 각 문항의 (a)는 사인법칙, 코사인법칙을 상황에 맞게 적용할 수 있는지를 확인하는 문제이다. (1-1)(b)에서는 함수가 아닌 방정식으로부터 필요한 도함수를 음함수를 이용하여 구할 수 있는지를 확인하고자 했다. (1-2)(b)에서는 극한을 구할 때, 삼각함수의 극한을 활용할 수 있는지를 확인하고자 했다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	(※ 적용 교육과정 및 과목에 모두 체크) □ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”** □ 수학 ■ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계
관련 성취기준	(※ 적용 교육과정 및 적용 성취기준ㆍ성취수준을 참고하여 작성)

관련 제시문	성취기준	과목명: 수학Ⅰ
(가),(나)	성취기준 1	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: 미적분
(다)	성취기준 2	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
(라)	성취기준 3	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	이준열 외	천재교육	2020	99	(가)	
수학 I	권오남 외	교학사	2020	98	(가)	
수학 I	이준열 외	천재교육	2020	103	(나)	
수학 I	권오남 외	교학사	2020	101	(나)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	98	(다)	
미적분	권오남 외	교학사	2020	96	(다)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	74	(라)	
미적분	권오남 외	교학사	2020	72	(라)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당사항 없음

4. 문항 해설

(1-1) (a) 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 한 변을 이웃한 두 변과 그 대각에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

(1-1) (b) 코사인법칙을 이용하면 구하고자 하는 각을 포함하는 방정식을 구할 수 있다. 함수가 아닌 방정식의 경우, 음함수 미분을 활용하면 관련 도함수 및 미분계수를 구할 수 있다.

(1-2) (a) 사인법칙은 삼각형의 각 변들을 그 대각의 사인함수 및 외접원의 반지름으로 나타낸다. 이를 활용하면 이웃한 두 변의 길이를 이용해 대각에 대한 사인값의 비를 알 수 있다.

(1-2) (b) 문제 (1-2)(a)의 과정과 삼각함수의 극한을 이용하면, 주어진 문제를 기본적인 삼각함수의 극한 문제로 표현할 수 있다.

5. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)(a)	코사인법칙을 적용하여 방정식을 구하면 3점	3점
	양수 조건 및 삼각함수의 범위를 이용하여 문제를 완전히 해결하면 2점	2점
(1-1)(b)	코사인법칙을 이용하여 방정식을 구하면 2점	2점
	음함수를 이용하여 $f'(\theta)$를 $s, \dfrac{ds}{d\theta}, f(\theta)$로 표현하면 3점	3점
	(1-1)(a)의 관계식을 미분하여 $\dfrac{ds}{d\theta}$를 구하면 2점	3점
	주어진 값들을 대입하여 $f'(\theta)$를 구하면 3점	2점
(1-2)(a)	사인법칙을 이용하여 관계식을 구하면 3점	3점
	계산 실수 없이 답을 구하면 2점	2점
(1-2)(b)	각$\angle PSO$와 각$\angle PTO$를 이용하여 $g(\theta)$를 표현하면 2점	2점
	사인함수의 극한을 이용하여 주어진 극한을 θ에 관한 구체적인 극한으로 나타내면 5점	5점
	사인함수의 극한을 이용하여 구하고자 하는 극한을 구하면 3점	3점

6. 예시 답안

(1-1) (a) S의 좌표를 $(s, 0)$이라 하자. 선분 PS의 길이는 피타고라스 정리에 의해서 $\sqrt{(\cos\theta - s)^2 + (\sin\theta)^2} = 4$ 이므로 이것을 s에 대해서 풀면 $s = \cos\theta \pm \sqrt{16 - (\sin\theta)^2}$ 이 된다. S는 x축의 양의 방향 위의 점이고, $|\cos\theta|, |\sin\theta| \le 1$이므로 $s = \cos\theta + \sqrt{16 - (\sin\theta)^2}$ 가 된다.

(b) 제시문 (나)를 삼각형 ΔOPS에 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$s^2 = 1^2 + 4^2 - 8\cos f(\theta)$$

이를 제시문 (다)를 이용하여 θ에 대해서 미분하면

$$2s \cdot \frac{ds}{d\theta} = 8\sin f(\theta) \cdot f'(\theta)$$

를 얻을 수 있다. 이 때, (a)의 결과를 θ에 대해서 미분하면, $\frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta - \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{16 - (\sin\theta)^2}}$ 임을 알 수 있다.

$\theta = \frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{ds}{d\theta} = -1$이고, $\sin f(\theta) = \frac{s}{4}$이므로, 두 식을 이용하면 $f'(\theta) = -1$을 얻을 수 있다.

(1-2) (a) 제시문 (가)를 삼각형 ΔPSO에 이용하면, $\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta}{4}$이므로 $\sin\theta_1 = \frac{1}{20}$임을 알 수 있다.

(b) 각$\angle PSO$를 θ_1, 각$\angle PTO$를 θ_2라 하자. 그러면 $g(\theta) = \theta_1 - \theta_2$이며, (1-2) (a)에서와 같은 방법으로 $\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta}{4}$, $\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta}{8}$임을 쉽게 알 수 있다. 그리고 $\lim_{\theta \to \pi-} g(\theta) = \lim_{\theta \to \pi-} \theta_1 = \lim_{\theta \to \pi-} \theta_2 = 0$이므로 제시문 (라)에 의해서 $\lim_{\theta \to \pi-} \frac{\sin\theta_1}{\theta_1} = \lim_{\theta \to \pi-} \frac{\sin\theta_2}{\theta_2} = 1$이 된다.

따라서, 다음과 같이 구하고자 하는 극한을 구할 수 있다.

$$\lim_{\theta \to \pi-} \frac{g(\theta)}{\pi - \theta} = \lim_{\theta \to \pi-} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi - \theta} = \lim_{\theta \to \pi-} \left(\frac{\theta_1}{\pi - \theta} - \frac{\theta_2}{\pi - \theta} \right) = \lim_{\theta \to \pi-} \left(\frac{\sin\theta_1}{\pi - \theta} \cdot \frac{\theta_1}{\sin\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{\pi - \theta} \cdot \frac{\theta_2}{\sin\theta_2} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to \pi-} \frac{\sin\theta_1 - \sin\theta_2}{\pi - \theta} = \lim_{\theta \to \pi-} \frac{\sin\theta}{8(\pi - \theta)} = \frac{1}{8}$$

[문항 2]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 연속함수, 사잇값의 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 출제 의도

연속 함수의 개념을 잘 이해해서 주어진 상황에서 연속 함수가 구성될 조건을 정확히 찾아낼 수 있는지를 평가한다. 사잇값의 정리는 직관적으로 당연하게 생각되는 결론을 수학적으로 논증할 수 있게 해주는 도구인데, 이러한 도구를 이용해서 직관적으로 값만 얻지 않고 그 값이 되어야만 하는 상황을 엄밀하게 증명할 수 있는지 평가하는 것이 (2-1)의 출제 의도이다. (2-2)는 함수를 합성했을 때 정의역과 공역/치역이 어떻게 함수의 존재성이 영향을 주는지를 파악하는 문제이며, 제시문을 읽고 주어진 상황에 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2-3)은 구간별로 주어진 함수를 잘 이어붙여서 전체집합에서 연속함수가 되도록 구성하는 문제이며 이는 교과서에서 좌극한/우극한을 이용해서 각 점에서 어떤 함수가 연속인지를 알아내는 예시들의 심화된 형태이다. 좌극한/우극한 뿐 아니라 (2-2)의 상황과 같이 함수 자체가 구간별로 존재하는 또는 존재하지 않는 상황이 되는 경우에 유의하면서 전체함수를 구성해야 해서, 앞의 두 소문항보다 난이도가 다소 높은 변별력을 목적으로 하는 문항이기도 하다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	(※ 적용 교육과정 및 과목에 모두 체크) □ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학 Ⅰ ■ 수학 Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	(※ 적용 교육과정 및 적용 성취기준ㆍ성취수준을 참고하여 작성)		
	관련 제시문	성취기준	과목명: 수학Ⅱ
	(가), (나)	성취기준 1	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
		성취기준 2	[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	30-33	(가)	재구성
수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	32-36	(가)	재구성
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	38	(나)	
수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	40	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당사항 없음

4. 문항 해설

(2-1) 사인함수가 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 ± 1이 되는 값을 유일하다는 사실로부터 $f(2\pi)$, $f(3\pi)$의 값을 구할수 있고 이로부터 사잇값의 정리를 써서 $f(\frac{5\pi}{2})$의 값을 구하고 이를 엄밀하게 증명할 수 있다.

(2-2) $h(x)$는 구간을 잘 나누면 각각의 구간에서 일차함수이므로 그래프를 어렵지 않게 그릴 수 있다.
이 그래프의 개형과 사인함수의 공역의 범위를 고려하여 $b-a$가 최대가 되는 $f(x)$의 정의역 $[a,b]$를 구할 수 있다. 이것은 어렵지 않게 직관적으로 구할 수 있지만 이를 수학적으로 논증하기 위해서는 제시문 (가)의 이해가 필요하다.
(2-3) 각각의 구간에서 연속함수가 존재할 조건을 소문항 (2-2)를 풀면서 파악할 수 있었을 것이다. 이러한 조건과 몇 개의 구간에서 구성된 함수를 이어 붙여서 전체 정의역에서 연속함수를 구성하기 위해서는 각각의 구간이 겹치는 점 a_2, a_3에서의 함수의 좌극한과 우극한이 같도록 해야한다. 이 두 조건을 파악해서 문제의 조건이 만족되는 값을 구할 수 있다.

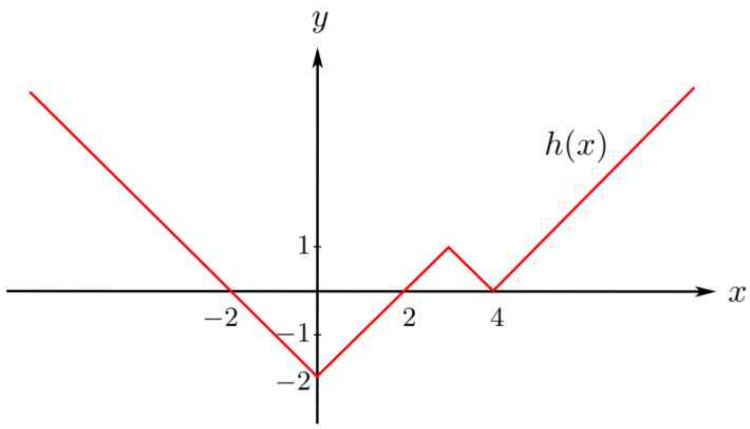
5. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	사인 함수의 값의 범위와 함수 $f(x)$의 공역에 대한 조건을 이용하여 $f(2\pi)=\frac{\pi}{2}$, $f(3\pi)=\frac{3\pi}{2}$임을 파악하면 5점	5점
	사잇값의 정리를 적용하여 $f(\frac{5\pi}{2})$의 값을 구하면 5점	5점
(2-2)	함수 $h(x)$의 그래프를 정확히 그리면 4점	4점
	함수 $h(x)$의 그래프로부터 $[a,b]$에 대한 조건을 파악하면 3점	3점
	$b-a$가 최대가 되는 a,b의 값을 구하면 3점	3점
(2-3)	$a_n \le x \le a_{n+1}$일 때 부등식 $-1 \le \cos nx + 1 \le 1$ 이 성립함을 파악하면 4점	4점
	$n=1,2$일 때 $\cos na_{n+1}+1 = \cos(n+1)a_{n+1}+1$ 이어야 함을 파악하면 4점	4점
	위 두 조건으로부터 a_2, a_3의 값과 a_4의 최댓값을 구하면 7점	7점

6. 예시 답안

(2-1) 등식 $\sin f(x) = \cos x$에 $x=2\pi$와 $x=3\pi$를 대입하면 $f(2\pi)=\frac{\pi}{2}$, $f(3\pi)=\frac{3\pi}{2}$ 임을 알 수 있다. 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=\pi$ 인 c $(2\pi < c < 3\pi)$가 존재하고 이 때
$\cos c = \sin f(c) = 0$이어야 하므로, c의 값은 $\frac{5\pi}{2}$이어야 한다. 따라서 $f(\frac{5\pi}{2})=\pi$이다.

(2-2) 함수 $h(x)=|x|-|x-3|+|x-4|-3$의 그래프는 다음과 같다.



$\sin f(x) = h(x)$인 연속함수 $f(x)$가 존재하려면 $h(x)$의 치역이 사인함수의 치역인 $[-1,1]$에 포함되어야 하므로, $h(x)$의 정의역 $[a,b]$는 구간 $[-3,-1]$에 포함되거나 또는 $[1,5]$에 포함되어야 한다.

사인함수 $g(x) = \sin x$는 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에서 일대일인 연속함수이고 $g(x)$의 치역 $[-1,1]$은 $[-3,-1]$ 또는 $[1,5]$에서 정의된 연속함수 $h(x)$의 치역을 포함하므로, 제시문 (가)에 의하여 $g(f(x)) = h(x)$이고 구간 $[-3,-1]$과 $[1,5]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 각각 존재한다.

$b-a$가 최대이려면 $a=1, b=5$이고, 이때 $b-a=4$이다.

(2-3) 조건을 만족하는 연속함수 $f(x)$가 존재하려면,

(A) $a_n \le x \le a_{n+1}$일 때 부등식 $-1 \le \cos nx + 1 \le 1$ 이 성립해야 하고

(B) $n=1,2$일 때 $\cos na_{n+1} + 1 = \cos(n+1)a_{n+1} + 1$ 이어야 한다.

이 조건들을 다시 정리해 보면

(A) $a_n \le x \le a_{n+1}$ $(n=1,2,3)$ 일 때 $\cos nx \le 0$이고

$\cos na_{n+1} = \cos(n+1)a_{n+1}$ $(n=1,2)$이 성립하려면

$(n+1)a_{n+1} = \pm na_{n+1} + 2k\pi$ 이어야 한다. 따라서

(B) $a_{n+1} = 2k\pi$ 또는 $a_{n+1} = \frac{2k\pi}{2n+1}$이다 (단, k는 정수).

(A)에 의하여 $\frac{\pi}{2} \le x \le a_2$ 일 때, 부등식 $\cos x \le 0$가 성립해야 하므로, $a_2 \le \frac{3\pi}{2}$이다.

따라서 (B)에 의하여 $a_2 = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3}$ 이다.

$a_2 = \frac{2\pi}{3}$인 경우 $\frac{2\pi}{3} \le x \le a_3$일 때 부등식 $\cos 2x \le 0$이 성립해야 하므로 $a_3 \le \frac{3\pi}{4}$이다.

(B)에 의하여 $a_3 = \frac{2k\pi}{5}$(k는 정수)이어야 하는데, 이런 꼴의 값 중에 $\frac{2\pi}{3}$와 $\frac{3\pi}{4}$ 사이의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $a_2 = \frac{2\pi}{3}$일 수 없다.

$a_2 = \frac{4\pi}{3}$인 경우 $\frac{4\pi}{3} \le x \le a_3$일 때 부등식 $\cos 2x \le 0$이 성립해야 하므로 $a_3 \le \frac{7\pi}{4}$이다.

$a_3 = \frac{2k\pi}{5}$(k는 정수) 꼴의 값 중에서 $\frac{4\pi}{3}$와 $\frac{7\pi}{4}$ 사이의 값은 $a_3 = \frac{8\pi}{5}$가 유일하다.

$\frac{8\pi}{5} \le x \le a_4$일 때 부등식 $\cos 3x \le 0$이 성립하는 가장 큰 a_4의 값은 $\frac{11\pi}{6}$이다.

따라서 $a_2 = \frac{4\pi}{3}$, $a_3 = \frac{8\pi}{5}$이고, a_4의 최댓값은 $\frac{11\pi}{6}$이다.

[문항 3 (의예과 외)]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	이계 도함수, 부분적분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 출제 의도

부분적분법을 이용하여 주어진 함수에 관한 적분을 이계도함수에 관한 적분으로 표현할 수 있는지를 알아본다. 또한 이 결과를 이용하여 특정한 함수의 적분의 근삿값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계
관련 성취기준	(※ 적용 교육과정 및 적용 성취기준ㆍ성취수준을 참고하여 작성)

관련 제시문	성취기준	과목명: 미적분
(가)	성취기준 1	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: 수학
(나)	성취기준 1	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	권오남외	교학사	2019	158-161	(가)	
미적분	이준열외	천재교육	2019	155-158	(가)	
미적분	권오남외	교학사	2019	116-119	(나)	
수학	이준열외	천재교육	2019	123-126	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당사항 없음

4. 문항 해설

(3-1)은 부분적분법을 적용하여 주어진 적분을 변형할 수 있는지를 평가한다. (3-2)는 주어진 함수를 적절하게 변형하여 부분적분법을 적용할 수 있는지를 평가한다. (3-3)은 (3-2)에서 얻어진 결과를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 부등식을 이끌어낼 수 있는지 알아본다.

5. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$g(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ 임을 보임.	5
	$g(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ 일 때, 부분적분법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임.	10
(3-2)	$h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$가 $h(a)=h(b)$=0, $h''(x)=f''(x)$임을 보임.	5
	(3-1)의 결과를 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임.	5
(3-3)	$0 \le \displaystyle\int_0^1 g(x)f''(x)dx \le \frac{7}{120}$ 임을 보임.	6
	(3-2)의 결과를 이용하여 주어진 부등식을 보임.	4

6. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx=\left[\frac{2x-a-b}{2}f(x)\right]_a^b-\int_a^b\frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx=-\int_a^b\frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx$$

이고,

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx&=\left[\frac{x^2-(a+b)x+ab}{2}f'(x)\right]_a^b-\int_a^b\frac{x^2-(a+b)x+ab}{2}f''(x)dx\\&=-\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(x)dx\end{aligned}$$

이다. 따라서 $g(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)f''(x)dx$이다.

(3-2) $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$로 두면

$$h(a)=h(b)=0,\quad h''(x)=f''(x)$$

이다. (3-1)의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(x)dx &= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} h''(x)dx \\ &= \int_a^b h(x)dx \\ &= \int_a^b \left\{ f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \right\} dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$가 성립한다.

(3-3) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$이면 $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$이다. (3-2)의 결과를 이용하면

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2} + \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

이다. 또한 $0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2} dx = \frac{7}{120}$

이므로 $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \le \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$이다.

[문항 3 (의예과)]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	집합, 수학적 귀납법, 약수, 배수	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 출제 의도

이 문제는 약수 배수 관계를 갖는 자연수의 기본적인 성질을 이용하여 명제와 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 수학적 귀납법을 이용하여 논리적으로 명제를 증명할 수 있는지도 평가한다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정“** ■ 수학 ■ 수학 I □ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: 수학 I
(가)	성취기준 1	[12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

관련 제시문	성취기준	과목명: 수학
(나)	성취기준 2	[10수학 03-03] 집합의 연산을 할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	권오남 외	교학사	2017	155	(가)	
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	162	(가)	
수학	권오남 외	교학사	2017	170	(나)	재구성
수학	이준열 외	천재교육	2017	181	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당사항 없음

4. 문항 해설

(3-1) 서로 다른 두 자연수 a,b에 대하여 a가 b의 배수이면 a는 $2b$ 이상이라는 사실을 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

(3-2) 자연수의 소인수분해가 주어졌을 때 약수 배수 관계를 판별할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(3-3) $\{2^a \cdot 3^b\}$이 $2^a \cdot 3^b$을 포함하는 유일한 독립적인 집합이라는 것을 파악하면 문제를 해결할 수 있다.

5. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	(a) 서로 다른 두 자연수 a,b에 대하여 a가 b의 배수이면 a는 $2b$ 이상이어야 된다는 사실을 이용하여 증명하면	5점
	(b) (a)의 결과를 이용하지 않더라도 올바른 예를 찾아 증명하면	5점
(3-2)	(a) X_m의 두 원소 $2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$과 $2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$에 대하여 $2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$이 $2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$의 약수일 필요충분조건이 $a_1 \le a_2$이고 $b_1 \le b_2$이라는 사실을 이용하여 증명하면	5점
	(b) (a)의 결과를 이용하여 올바른 예를 찾아 증명하면	5점
(3-3)	$2^a \cdot 3^b$은 $D(2^a \cdot 3^b)$의 모든 원소의 배수라는 것을 이용하여 $2^a \cdot 3^b$을 포함하는 $D(2^a \cdot 3^b)$의 독립적인 부분집합은 $\{2^a \cdot 3^b\}$뿐이라는 것을 증명하면	3점
	수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하면	7점

6. 예시 답안

(3-1) (a) 주어진 집합이 독립적인 집합이 아니라고 가정하자. 그러면 약수 배수 관계인 서로 다른 두 원소 x, y가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 x가 y의 약수라 하면 $2^n \ge y \ge 2x \ge 2(2^{n-1}+1) = 2^n + 2$가 되어 모순이 생긴다. 따라서 독립적인 집합이다.
(b) $\{\{1\},\{2\},A_2,\cdots,A_n\}$은 $\{1,2,\ldots,2^n\}$의 분할이고 $\{1\},\{2\},A_2,\ldots,A_n$은 서로 다른 독립적인 집합이다. 따라서 $\{1,2,\ldots,2^n\}$은 $n+1$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다.

(3-2) (a) $m=0$이면 $X_0=\{1\}$이므로 정의에 따라 X_0는 독립적인 집합이다. $m \ge 1$이라 하자. X_m이 독립적인 집합이 아니라고 가정하면, X_m의 서로 다른 두 원소 $x = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$, $y = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$이 존재하여 x가 y의 약수이거나 y가 x의 약수이어야 한다. 일반성을 잃지 않고 x가 y의 약수라 하자. 이때 $a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$가 성립하는데 $a_1+b_1 = a_2+b_2 = m$이므로 $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$가 되어 $x \ne y$에 모순이다. 따라서 X_m은 독립적인 집합이다.

(b) $\{X_0, X_1, \ldots, X_{a+b}\}$는 $D(2^a \cdot 3^b)$의 분할이고 각 X_i는 독립적인 집합이므로 $D(2^a \cdot 3^b)$은 $a+b+1$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다.

(3-3) $a+b$에 대한 수학적 귀납법을 사용하자.
$a+b=1$이면 $D(2^a \cdot 3^b)$은 $\{1,2\}$ 또는 $\{1,3\}$이다. 두 집합 모두 독립적인 집합이 아니므로 하나의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

수학적 귀납법을 사용하기 위하여 $a+b>1$인 경우를 보자. 일반성을 잃지 않고, $a>1$이라 할 수 있다. $D(2^a\cdot 3^b)$을 $a+b$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다고 가정하고, $\{Y_1,Y_2,\dots,Y_{a+b}\}$를 독립적인 집합으로의 분할이라 하자. 일반성을 잃지 않고 $2^a\cdot 3^b\in Y_{a+b}$라 하자.

$2^a\cdot 3^b$은 $D(2^a\cdot 3^b)$의 모든 원소의 배수이므로 $Y_{a+b}=\{2^a\cdot 3^b\}$이다. 따라서 $\{Y_1,Y_2,\dots,Y_{a+b-1}\}$은 $D(2^a\cdot 3^b)-\{2^a\cdot 3^b\}$의 분할이 된다. 각각의 $i=1,2,\dots,a+b-1$에 대하여 $Z_i=Y_i\cap D(2^{a-1}\cdot 3^b)$라 하고 $Z_1,Z_2,\dots,Z_{a+b-1}$ 중 정확히 $d\ (\le a+b-1)$개가 공집합이 아니라고 하자. 일반성을 잃지 않고, $Z_1,Z_2,\dots,Z_d$는 공집합이 아니고, $Z_{d+1}=Z_{d+2}=\cdots=Z_{a+b-1}=\varnothing$이라 하자. $D(2^{a-1}\cdot 3^b)\subset D(2^a\cdot 3^b)-\{2^a\cdot 3^b\}$이므로 $\{Z_1,Z_2,\dots,Z_d\}$는 $D(2^{a-1}\cdot 3^b)$의 분할인데, $d\le a+b-1$이므로 $D(2^{a-1}\cdot 3^b)$이 $a+b-1$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다는 귀납 가정에 모순이다. 따라서 $D(2^a\cdot 3^b)$은 $a+b$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

(별해) $D(2^a\cdot 3^b)$이 $c\ (\le a+b)$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하다고 가정하고, $\{Y_1,Y_2,\dots,Y_c\}$를 독립적인 집합으로의 분할이라 하자. 집합 $K=\{1,2,2^2,\dots,2^a,2^a\cdot 3,2^a\cdot 3^2,\dots,2^a\cdot 3^b\}$에서 임의로 두 개의 원소를 뽑으면 하나가 반드시 다른 하나의 배수가 된다. 따라서 각각의 $i=1,2,\dots,c$에 대하여 $n(K\cap Y_i)\le 1$이다.

그런데 $K\subset Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_c$이므로 $a+b+1=n(K)\le\sum_{i=1}^{c}n(K\cap Y_i)\le\sum_{i=1}^{c}1=c\le a+b$가 되어 모순이 생긴다. 따라서 $D(2^a\cdot 3^b)$는 $a+b$개 이하의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.