2022학년도 수시모집

논술 모의고사 문제지

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. **답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.**

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

[자연계열 - 일반]

(의예과 제외)

☞ 의예과는 5쪽부터 푸시오.

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과 외))

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [사인법칙] 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

이다.

(나) [코사인법칙] 삼각형 ABC에서

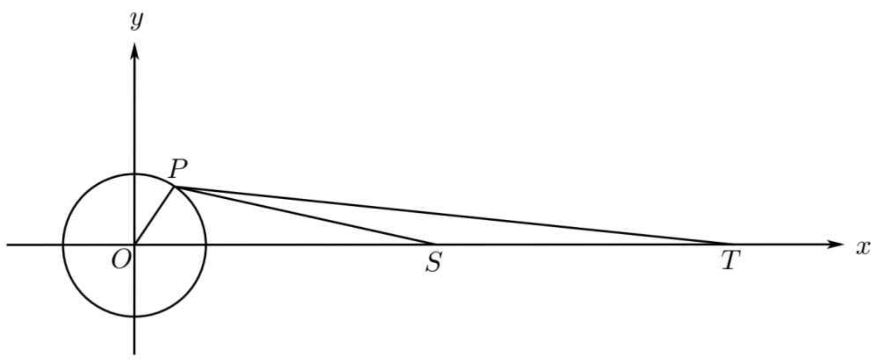
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

이다.

(다) [음함수의 미분법] 음함수 표현 $f(x,y)=0$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(라) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (단, x의 단위는 라디안)

(※) 단위원 위의 한 점을 $P(\cos\theta, \sin\theta)$라 하자. 여기서 θ는 $0\le\theta\le\pi$를 만족한다. 점 P로부터 거리가 4와 8인 x축의 양의 방향 위의 점들을 각각 S와 T라 하자.



(1-1) (a) 점 S의 x좌표를 변수 θ에 관한 식으로 나타내시오. [5점]

(b) 원점을 O라 하자. 각 $\angle OPS$의 크기를 $f(\theta)$라 할 때, $f'(\pi/2)$의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) (a) 각 $\angle PSO$를 θ_1라 하자. $\sin\theta=\frac{1}{5}$일 때, $\sin\theta_1$의 값을 구하시오. [5점]

(b) 각 $\angle SPT$의 크기를 $g(\theta)$라 할 때, 극한값 $\lim_{\theta\to\pi}\frac{g(\theta)}{\pi-\theta}$를 구하시오. [10점]

인하대학교 INHA UNIVERSITY

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과 외))

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 구간 $[a,b]$에서 일대일인 연속함수 $g(x)$와 구간 $[c,d]$에서 정의된 연속함수 $h(x)$에 대하여, $h(x)$의 치역이 함수 $g(x)$의 치역의 부분집합이라고 하자. 이때, 구간 $[c,d]$에 속하는 모든 실수 α에 대하여 $f(\alpha)$를 $g(\beta)=h(\alpha)$가 성립하는 수 $\beta(a<\beta<b)$로 정의하면, $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 정의된 함수이다.
구간 $[c,d]$의 임의의 실수 α에 대하여, 함수 $f(x)$의 정의를 따르면 $g(f(\alpha))=h(\alpha)$이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$는 연속함수이므로,

$$g\left(\lim_{x\to\alpha}f(x)\right)=\lim_{x\to\alpha}g(f(x))=\lim_{x\to\alpha}h(x)=h(\alpha)$$

이고 $g(x)$가 일대일함수라는 사실로부터 $\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$를 얻는다.
따라서 $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 연속이고 $(g\circ f)(x)=h(x)$이다.

(나) [사잇값의 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(2-1) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $0\le f(x)\le 2\pi$이고 $\sin f(x)=\cos x$를 만족할 때, $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\sin f(x)=|x|-|x-3|+|x-4|-3$을 만족할 때, $b-a$의 최댓값을 구하시오. [10점]

(2-3) 실수 a_1, a_2, a_3, a_4가 다음 조건을 만족한다.

(i) $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,2,3)$
(ii) $a_n\le x\le a_{n+1}$인 실수 x에 대하여 $\sin f(x)=\cos(nx)+1$ $(n=1,2,3)$이고,
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 존재한다.

$a_1=\dfrac{\pi}{2}$일 때, a_2, a_3의 값을 구하고 a_4의 최댓값을 구하시오. [15점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과 외))

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [부분적분법] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

가 성립한다.

(나) $x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

이다.

(3-1) 상수 a, b에 대하여 다음을 만족하는 이차함수 $g(x)$를 구하시오. [15점]

실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속이며 $f(a) = f(b) = 0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

이다.

(3-2) (3-1)에서 구한 함수 $g(x)$와 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

(3-3) $\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \le \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \le \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$ 임을 보이시오. [10점]

[자연계열 - 의예과]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 구간 $[a,b]$에서 일대일인 연속함수 $g(x)$와 구간 $[c,d]$에서 정의된 연속함수 $h(x)$에 대하여, $h(x)$의 치역이 함수 $g(x)$의 치역의 부분집합이라고 하자. 이때, 구간 $[c,d]$에 속하는 모든 실수 α에 대하여 $f(\alpha)$를 $g(\beta)=h(\alpha)$가 성립하는 수 $\beta(a<\beta<b)$로 정의하면, $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 정의된 함수이다.
구간 $[c,d]$의 임의의 실수 α에 대하여, 함수 $f(x)$의 정의를 따르면 $g(f(\alpha))=h(\alpha)$이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$는 연속함수이므로,

$$g\left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right)=\lim_{x\to\alpha} g(f(x))=\lim_{x\to\alpha} h(x)=h(\alpha)$$

이고 $g(x)$가 일대일함수라는 사실로부터 $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$를 얻는다.
따라서 $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 연속이고 $(g\circ f)(x)=h(x)$이다.

(나) [사잇값의 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(1-1) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $0\le f(x)\le 2\pi$이고 $\sin f(x)=\cos x$를 만족할 때, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\sin f(x)=|x|-|x-3|+|x-4|-3$을 만족할 때, $b-a$의 최댓값을 구하시오. [10점]

(1-3) 실수 a_1, a_2, a_3, a_4가 다음 조건을 만족한다.

(i) $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,2,3)$
(ii) $a_n\le x\le a_{n+1}$인 실수 x에 대하여 $\sin f(x)=\cos(nx)+1$ $(n=1,2,3)$이고, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 존재한다.

$a_1=\frac{\pi}{2}$일 때, a_2, a_3의 값을 구하고 a_4의 최댓값을 구하시오. [15점]

인하대학교 INHA UNIVERSITY

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [부분적분법] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

가 성립한다.

(나) $x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

이다.

(2-1) 상수 a, b에 대하여 다음을 만족하는 이차함수 $g(x)$를 구하시오. [15점]

실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속이며 $f(a) = f(b) = 0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

이다.

(2-2) (2-1)에서 구한 함수 $g(x)$와 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a) + f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

(2-3) $\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \le \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$ 임을 보이시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [수학적 귀납법] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$ $(k \geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(나) [집합의 분할] 집합 X에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 집합 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$을 "$X$의 분할"이라 한다.

(1) 모든 $i=1,2,\ldots,m$에 대하여 $\varnothing \neq A_i \subseteq X$이다.

(2) 서로 다른 $i,j \in \{1,2,\cdots,m\}$에 대하여 $A_i \cap A_j = \varnothing$이다.

(3) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = X$

예를 들어, $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$와 $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$는 모두 $\{1,2,3,4\}$의 분할이다.
또한, m개의 부분집합으로 구성된 X의 분할이 존재하면, "X를 m개의 집합으로 분할 가능하다"라고 한다.

(※) 자연수를 원소로 갖는 공집합이 아닌 집합 A가 다음 조건 중 하나를 만족하면 A를 "독립적인 집합"이라 부르자.

(1) $n(A)=1$

(2) A의 임의의 서로 다른 두 원소 x,y에 대하여 x는 y의 약수도 아니고 배수도 아니다.

(3-1) (a) 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $A_n = \{2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \cdots, 2^n\}$은 독립적인 집합임을 보이시오. [5점]

(b) 임의의 자연수 n에 대하여 집합 $\{1,2,3,\ldots,2^n\}$을 $n+1$개의 독립적인 집합으로 분할 가능함을 보이시오. [5점]

(3-2) 자연수 n에 대하여 $D(n)$을 n의 모든 약수의 집합이라 하자.

(a) 음이 아닌 정수 m에 대하여 집합 $X_m = \{2^a \cdot 3^b \mid a$와 b는 $a+b=m$을 만족하는 음이 아닌 정수$\}$가 독립적인 집합임을 보이시오. [5점]

(b) 음이 아닌 정수 a,b에 대하여 $D(2^a \cdot 3^b)$은 $a+b+1$개의 독립적인 집합으로 분할 가능함을 보이시오. [5점]

(3-3) 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제가 성립함을 보이시오. [10점]

$a+b \geq 1$인 모든 음이 아닌 정수 a,b에 대하여 $D(2^a \cdot 3^b)$은 $a+b$개의 독립적인 집합으로 분할 가능하지 않다.

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>