계 열 문 항

● 세 집합 X, Y, Z에 대하여, 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$의 합성함수는 $g \circ f: X \to Z$이고, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$와 같이 나타낼 수 있다.

● 세 함수 f, g, h에 대하여, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$이다. 즉, 함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

● 함수 $f: X \to Y$가 일대일대응일 때, 집합 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다. 따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f의 역함수라고 하고, 이것을 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉,

$f^{-1}: Y \to X$, $x = f^{-1}(y)$

이다. 또한 이로부터 다음을 알 수 있다.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \ (x \in X)$,
$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \ (y \in Y)$

즉, 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 집합 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수이다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고,

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(x) \tag{1}$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

1-2. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $F(x) = g(x) + h(x)$라 하자.
함수 F의 역함수가 존재하고,

$$(g \circ F)(x) = h(x), \qquad (h \circ F)(x) = g(x) \tag{2}$$

일 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

계 열 문 항

● 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

● 함수 $g(x)$가 유리함수일 때, x의 범위에 따른 함숫값의 범위를 다음과 같이 어림할 수 있다. 예를 들어 닫힌구간 $[-2,-1]$에서 $g(x)=\dfrac{3x+1}{x+4}$의 범위를 알아보자.

$-2 \le x \le -1$일 때 $x+4>0$이므로,

$\dfrac{3x+1}{x+4}=\dfrac{3(x+4)-11}{x+4}=\dfrac{3(x+4)}{x+4}-\dfrac{11}{x+4}\le 3$을 얻는다.

따라서, $-2 \le x \le -1$일 때 $g(x)\le 3$임을 알 수 있다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

● $a_1=3$

● $f(x)=x^3+x-2$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a_n,f(a_n))$에서의 접선을 l_n이라 할 때,
l_n의 x절편을 a_{n+1}이라 하자.

2-1. a_{n+1}을 a_n으로 나타내시오.

2-2. $1\le a_n \le 3$일 때, $|a_{n+1}-1|\le \dfrac{2}{3}|a_n-1|$임을 보이시오.

계 열 문 항

● 양수 x_1, x_2에 대하여, $x_1x_2=1$이면 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$가 성립함을 보일 수 있다.

① $x_1=x_2$이면 $x_1=x_2=1$이고 $1+x_1x_2=1+1=2$이므로 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$이다.

② $x_1 \ne x_2$이면 $x_1 > x_2$라 가정할 수 있고 이 때 $x_1>1$, $x_2<1$ 이다.

따라서 $1-x_1<0$, $1-x_2>0$ 이므로

$(1-x_1)(1-x_2)=1-x_1-x_2+x_1x_2<0$ 이고

$1+x_1x_2<x_1+x_2$가 성립한다.

①, ② 에서 $x_1x_2=1$이면 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$가 성립하고 등호는 $x_1=x_2$일 때 성립한다.

● n개의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여

$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 산술평균, $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 기하평균이라 한다.

$n=2$ 인 경우,

$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=(\sqrt{x_1})^2-2\sqrt{x_1x_2}+(\sqrt{x_2})^2=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \ge 0$이므로,

$\frac{x_1+x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$이 성립한다.

한편 $y_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2}}, y_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$라 하면

$\frac{y_1+y_2}{2} \ge \sqrt{y_1y_2}=\sqrt{\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_1x_2}}}=1$ 이므로 $y_1+y_2 \ge 2$ 이다.

즉 $x_1x_2=1$ 이면 $x_1+x_2 \ge 2$ 임을 알 수 있다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 다음 명제를 $P(n)$이라 하자.

> n개의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여
> $x_1x_2\cdots x_n=1$ 이면 $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n$ 이다.

3-1. $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참임을 다음 두 가지 경우로 나누어 보이시오.

① $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$인 경우

② $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$이 아닌 경우

3-2. $P(n)$이 참일 때, n개의 양수 $t_1, t_2, \cdots, t_n$에 대하여 부등식

$$\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n} \ge (t_1t_2\cdots t_n)^{1/n}$$

이 성립함을 보이시오.