2021학년도 서강대학교

모의논술 자료집 1차

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목　　차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

1. a가 양의 실수일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(1+a)^{n+1} \geq \frac{n^2}{2} a^2$$

또한, 이 부등식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$을 보이시오.

2. $r \neq 1$일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

또한, 이 등식을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$의 합을 구하시오.

3. $0 < r < 1$일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{r^k}{k} = -\ln(1-r) - \int_0^r \frac{t^{n+1}}{1-t}\, dt$$

4. 문제 3의 결과를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$의 합을 구하시오.

<u>**제시문**</u>

[가] 실수 a, b와 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$$

[나] 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$이고 $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

[다] $r \ne 1$일 때 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이다. 또한, $|r| < 1$이면 $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

이다.

[라] 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

[마] 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x)$라고 하자. 이 때 $h(x) = g(x) - f(x)$라고 하면 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $h(x) \ge 0$이므로 정적분 $\int_a^b h(x)\,dx$은 곡선 $y = h(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다. 제시문 [라]에 의하여

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx \ge 0$$

이고 따라서

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

이다.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 이항정리를 이용하여 수열의 극한을 계산할 때 필요한 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가
· 등비급수의 기본적인 사실들과 다항함수의 미분을 활용하여 어떤 형태의 급수의 합을 계산할 수 있는지를 평가
· 수열의 극한에 대한 기본적인 성질들과 정적분의 기본적인 성질들을 이용하여 정적분으로 정의된 수열의 극한이 수렴함을 알 수 있는지를 평가
· 등비급수의 기본적인 사실들과 유리함수의 적분법을 활용하여 어떤 형태의 급수의 합을 계산할 수 있는지를 평가

2. 문항해설

[제시문 해설]

제시문 [가]는 2015 개정 교육과정 “[확률과 통계] (1) 경우의 수 ② 이항정리”에 해당하는 제시문이다. 핵심 교과내용인 이항정리의 내용을 서술하였다.

제시문 [나]는 2015 개정 교육과정 “[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한”에 해당하는 제시문이다. 수열의 극한값의 대소 관계를 서술하였다.

제시문 [다]는 2015 개정 교육과정 “[미적분] (1) 수열의 극한 ② 급수”에 해당하는 제시문이다. 등비급수의 수렴에 대한 기본적인 사실을 서술하였다.

제시문 [라]는 2015 개정 교육과정 “[수학II] (3) 적분 ② 정적분”에 해당하는 제시문이다. 정적분의 기본성질인 선형성에 대한 사실을 서술하였다.

제시문 [마]는 2015 개정 교육과정 “[수학II] (3) 적분 ③ 정적분의 활용”에 해당하는 제시문이다. 정적분의 대소 관계에 기본적인 사실을 서술하였다.

[문항 해설]

문제 1. 제시문 [가]의 이항정리를 이용하여 주어진 부등식을 유도하고 이 부등식을 이용하여 어떤 극한식을 보일 수 있는지를 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[확률과 통계] (1) 경우의 수 ② 이항정리”에서 “이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한 “[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한”에서 “수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 제시문 [가]와 [나]에 주어진 이항정리와 수열의 극한값의 대소 관계를 이용하여 주어진 극한식을 유도할 수 있다.

문제 2. 제시문 [다]의 등비급수의 부분합의 공식 및 다항함수의 미분을 활용하여 어떤 형태의 급수의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[미적분] (1) 수열의 극한 ② 급수”에서 “급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 제시문 [다]에서 주어진 등비급수의 부분합의 공식을 미분하여 얻는 항등식에 문제 1에서 유도한 극한식을 적용하여 원하는 급수의 합을 구할 수 있다.

문제 3. 수열의 극한에 대한 기본적인 성질들과 제시문 [라]에 서술한 정적분의 기본적인 성질들을 이용하여 정적분으로 정의된 수열의 극한이 수렴함을 알 수 있는지를 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[미적분] (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법”에서 “치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한, 2015 개정 교육과정 “[미적분] (1) 수열의 극한 ② 급수”에서 “급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 제시문 [다]에서 주어진 등비급수의 부분합의 공식을 적분하여 원하는 급수의 부분합을 구할 수 있다.

문제 4. 수열의 극한에 대한 기본적인 성질들과 정적분의 기본적인 성질들을 이용하여 정적분으로 정의된 수열의 극한이 수렴함을 알 수 있는지를 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[수학 II] (3) 적분 ③ 정적분의 활용”에서 “곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한, 2015 개정 교육과정 “[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한”에서 “수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 문제 3에서 증명한 등식과 제시문 [나]를 이용하면 주어진 극한식이 성립함을 보일 수 있다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

· 문제 1(3점) : 부등식 증명은 2점, 극한식 증명은 1점.
· 문제 2(2점) : 등식 증명은 1점, 급수의 합에 1점. 계산 실수 -0.5점
· 문제 3(3점) : 등식 증명에 3점.
· 문제 4(2점) : 극한식 증명에 2점. 계산 실수 -0.5점

[유의사항]

· 문제 1의 풀이에서 이항정리 대신에 수학적 귀납법을 이용하는 것도 가능하다.
· 문제 2의 풀이에서 등비급수의 부분합의 공식을 유도하는 방법을 일반화하는 것 등의 다른 풀이도 가능하다.
· 문제 4의 풀이에서 제시문을 이용하여 정적분으로 정의된 수열이 0으로 수렴하는 것을 정확히 설명하지 않으면 감점한다.
· 계산 실수로 급수의 합 등을 잘못 계산한 경우 0.5점 감점한다.

4. 예시답안

1. 제시문 [가]를 이용하면,

$$(1+a)^{n+1} = 1+(n+1)a+\frac{(n+1)n}{2}a^2+\cdots+a^{n+1} > \frac{n^2}{2}a^2$$

이다. 따라서

$$0<\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{(1+1)^{n+1}}<\frac{4n}{n^2}=\frac{4}{n}\to 0$$

이므로 제시문 [나]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

이다.

2. 제시문 [다]와 [라]의 결과를 이용하면,

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}=\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=1}^{n} r^k\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{r-r^{n+1}}{1-r}\right)=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

이다. 여기서 $r=\frac{1}{2}$ 일 때, 제시문 [다]와 문제 1의 결과를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=2$$

이다.

3. 제시문 [다]와 [라]의 결과를 이용하면,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{r^k}{k}=\int_0^r\left(\sum_{k=1}^{n+1}t^{k-1}\right)dt=\int_0^r\left(\frac{1}{1-t}-\frac{t^{n+1}}{1-t}\right)dt=-\ln(1-r)-\int_0^r\frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$$

이다.

4. 제시문 [마]에 의하여

$$0\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-t}\,dt=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t}\,dt=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ln 2\to 0$$

이므로 제시문 [나]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt=0$$

이다. 문제 3의 결과를 이용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}=\ln 2$$

이다.