THE ENGINE OF
KOREA
HANYANG
UNIVERSITY

2020 한양대학교 ERICA
논술 출제의도 및 예시답안

ERICA 입학처 입학팀 2020.03.31

2020학년도 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

[수리논술 오전 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉~〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 연속확률변수 X가 모든 실수값을 가지고, 그 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 $m,\ \sigma^2\ (\sigma > 0)$에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, 확률변수 X의 확률분포를 정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}\left(m,\ \sigma^2\right)$과 같이 나타낸다.

〈나〉 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \sigma^2\right)$을 따를 때, 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이 때 구간 $[a,\ b]$에 확률변수 X가 속할 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

〈다〉 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z의 확률분포표는 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

〈라〉 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \sigma^2\right)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이면, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1-1. 확률변수 X가 평균이 k이고, 분산이 k인 정규분포를 따르고, $\mathrm{P}\left(X \leq -\frac{1}{4}\right) = 0.1587$일 때, 제시문 〈다〉의 표준정규분포표를 이용하여 k의 값을 구하시오. (단, $k > 0$) **[10점]**

1-2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따를 때, $\sum_{n=1}^{5} \mathrm{P}(X \leq 2n) = \frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) **[15점]**

1-3. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 0.5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%인 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$이다. 여기서, $b-a \leq 0.258$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.) **[15점]**

1. 출제 의도

(1) 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있는지, (2) 표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 표준정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지, 그리고 (3) 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾기 위해 제시문을 잘 활용하는지와 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

2. 문항 해설

연속 확률분포에서 가장 기본이 되는 정규분포의 성질을 이해하고 이를 활용한 확률을 계산하는 것은 '확률과 통계' 활용의 유용성을 보여줄 수 있다. 본 문항의 핵심적인 내용은 확률과 통계의 '확률분포', '통계적 추정' 단원에서 다루어진다.

따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있는지, 표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 확인하고자 한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

1-1.

[풀이]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(k,k)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-k}{\sqrt{k}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서, $\mathrm{P}\left(X \leq -\frac{1}{4}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{-\frac{1}{4}-k}{\sqrt{k}}\right) = 0.1587$에서 $\mathrm{P}(Z \leq -1.0) = 0.1587$ 이므로

$$\frac{-\frac{1}{4}-k}{\sqrt{k}} = -1.0$$

$$k+\frac{1}{4} = \sqrt{k}$$

$\left(k+\frac{1}{4}\right)^2 = k$

$k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}=k$

$k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}=0$

$\left(k-\frac{1}{4}\right)^2 = 0$

따라서, $k=\frac{1}{4}=0.25$

---[10점]

1-2.

[풀이]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6,2^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-6}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\mathrm{P}(X\le 2n) &= \sum_{n=1}^{5}\mathrm{P}\left(Z\le \frac{2n-6}{2}\right)=\sum_{n=1}^{5}\mathrm{P}(Z\le n-3)\\ &=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\le -1)+\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\le 2)\end{aligned}$$

(여기서, 표준정규분포의 대칭성을 이용하여)

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(Z\ge 2)+\mathrm{P}(Z\ge 1)+\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\le 2)\\ &=\{\mathrm{P}(Z\ge 2)+\mathrm{P}(Z\le 2)\}+\{\mathrm{P}(Z\ge 1)+\mathrm{P}(Z\le 1)\}+\mathrm{P}(Z\le 0)\\ &=1+1+0.5\\ &=2.5=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서, $\frac{p}{q}=\frac{5}{2}$이므로 $p+q=5+2=7$.

---[15점]

1-3.

[풀이]

크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하자. 모표준편차 0.5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99%인 신뢰구간은 다음과 같다.

$\overline{x}-2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$

이 때, $a\le m\le b$에서

$b-a=2\times 2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$ 이므로

$2\times 2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le 0.258$

$\sqrt{n}\ge 10$

양변을 제곱하면 $n\ge 100$

따라서, 자연수 n의 최솟값은 100이다.

---[15점]

[수리논술 오전 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 각각 u, x에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$도 x에 대하여 미분 가능하고, 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

〈나〉 $f(x)$와 $g(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수이고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. 따라서 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 성질을 만족한다.

① $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$.

② 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g'(x)>0$ 이다.

2-1. 제시문 〈나〉의 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $g(2)=1$일 때, $f(1)f'(1)g'(2)$의 값을 구하시오. **[15점]**

2-2. 제시문 〈나〉의 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $g(2)=1$이고, $g(5)=5$일 때,

정적분 $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{[g'(f(x))]^2 f'(x)}dx$의 값을 구하시오. **[15점]**

1. 출제 의도

고교수학의 핵심개념인 역함수의 성질, 합성함수의 성질 및 미분, 정적분 등의 내용을 잘 숙지하고 있고 이를 매우 추상적으로 주어진 경우에도 적용 할 수 있는 능력이 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

2-1. 매우 추상적으로 주어진 식 속에 숨겨진 역함수와 합성함수의 미분개념을 찾아내 이를 사용하여 합성함수의 도함수 값을 구하는 문제이다.

2-2. 합성함수의 미분과 역함수의 성질을 이용하여 추상적으로 주어진 함수의 정적분 값을 구하는 문제이다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

2-1.

[풀이]

$f(g(x))=x$이므로 $[f(g(x))]^2=x^2$이다.

양변을 미분하면 제시문 〈가〉의 합성함수의 미분법에 의해,

$$2f(g(x))\cdot f'(g(x))g'(x)=2x$$

---[10점]

양변에 $x=2$를 대입하면

$$2f(1)f'(1)g'(2)=4$$
$$f(1)f'(1)g'(2)=2.$$

---[15점]

2-2.

[풀이]

$g(f(x))=x$이므로 제시문 〈가〉의 합성함수의 미분법에 의해,

$$\frac{1}{[g'(f(x))]^2f'(x)}=\frac{f'(x)}{[g'(f(x))f'(x)]^2}=f'(x).$$

---[5점]

그러므로 $\int_1^5\frac{1}{[g'(f(x))]^2f'(x)}dx=\int_1^5\frac{f'(x)}{[g'(f(x))\cdot f'(x)]^2}dx=\int_1^5 f'(x)dx=f(5)-f(1).$

---[10점]

그런데 $g(2)=1$, $g(5)=5$이므로 $f(5)=5$, $f(1)=2$.

따라서 구하는 정적분의 값은 3.

---[15점]

[수리논술 오전 문제3]

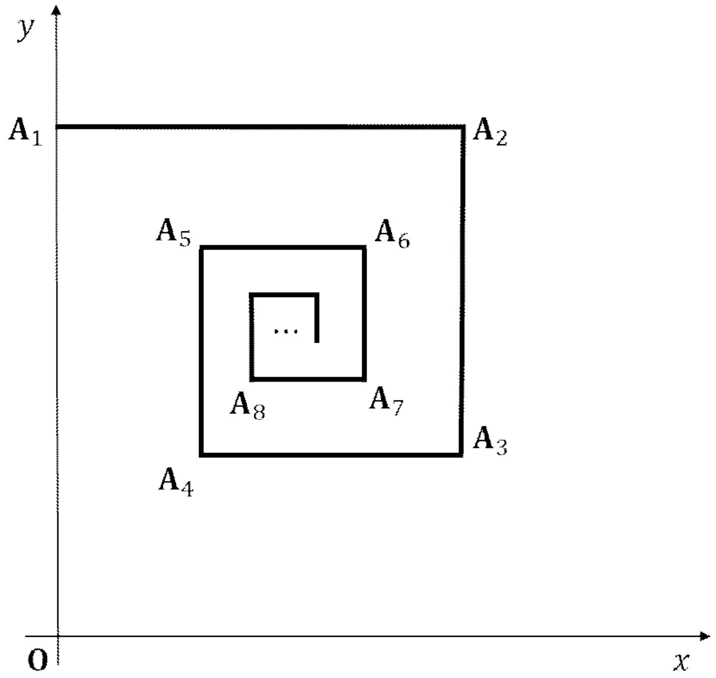
[문제 3] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A_n}\,(\mathrm{n}=1, 2, 3, \cdots)$은 그림과 같이 주어지고 다음 규칙을 만족한다.

① 점 A_1의 좌표는 $(0, 1)$이다.

② 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$은 선분 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$와 수직이다.

③ $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}} = r \times \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ 이며 $0 < r < 1$이다.



〈나〉 첫째항이 a 공비가 p인 등비급수는 $|p| < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-p}$이다.

3-1. 제시문 〈가〉에서 점 $\mathrm{A_n}$의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$과 $\lim_{n\to\infty} y_n$을 r로 나타내시오. **[10점]**

3-2. 제시문 〈가〉에 주어진 그림에서 y축과 평행한 선분 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}$을 y축 중심으로 회전시켜 생기는 원기둥 옆면의 겉넓이를 S_n이라 하자. $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

본 문제는 좌표평면 상의 점들의 좌표를 평면벡터와 좌표와의 대응관계를 이용해 제시문에 주어진 조건을 만족하도록 구할 수 있는지, 그리고 결과식에 나타나 있는 등비수열의 규칙성을 읽어내고 첫째항과 공비를 찾아 제시문에 주어진 등비급수의 합 공식을 써서 질문에 답할 수 있는지를 평가한다.

3-1. 평면 상의 점들의 좌표를 평면벡터와 대응시켜 주어진 조건을 이용해 구할 수 있는지, 좌표 표현식에 나타나 있는 등비급수의 첫째항과 공비를 읽어내 극한을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3-2. 원기둥의 표면적의 합을 구하는 식을 만들 수 있는지, 여러 등비급수가 복합적으로 엮여져 있는 경우에도 등비급수 공식을 잘 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

교과과정에서 배운 평면벡터와 좌표와의 대응관계를 써서 제시문에 주어진 조건들을 순차적으로 적용해 좌표 표현식들을 구한 뒤, 식들에 숨겨져 있는 규칙성을 역시 교과과정에서 배운 수열의 개념과 연관해 파악해내고, 가장 간단한 종류의 수열인 등비수열과 등비수열의 모든 항들의 합인 등비급수를 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 그리고, 공비가 무리수로 주어졌을 때 이차방정식의 해라는 점을 인지하여 복잡한 계산을 피해 답을 도출할 수 있는지도 평가한다. 등비급수에서는 첫째항과 공비를 읽어내는 것이 매우 중요하며 제시문에 주어지지 않은 조건들을 답을 쉽게 얻기 위해 임의로 가정하는 것은 감점 요인이 된다. 아울러 답안 작성시 제시문을 잘 활용하는지, 또한 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

점 A_1의 좌표가 $(0, 1)$, 점 A_2의 좌표가 (x_2, y_2)이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = (0, 1)$,

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = (x_2,\, y_2 - 1)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$를 벡터 $\vec{a}$라 하면, 벡터 $\vec{b} = (y_2 - 1,\, -x_2)$는 $\vec{a}$와 수직이고 $|\vec{b}| = |\vec{a}|$.

점 A_3의 좌표가 (x_3, y_3)이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = (x_3 - x_2,\, y_3 - y_2)$는 제시문 <가>의 규칙에 의해 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$에 수직이므로 벡터 $\vec{b}$에 평행하고 크기가 r배 작아진다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = r\,\vec{b}$이다.

점 A_3의 좌표 (x_3, y_3)은 다음과 같이 벡터합을 이용해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}(x_3,\, y_3) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = (0,\, 1) + (x_2,\, y_2 - 1) + r(y_2 - 1,\, -x_2) \\ &= (x_2 + r(y_2 - 1),\, y_2 - rx_2)\end{aligned}$$

마찬가지로, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = (x_4 - x_3,\, y_4 - y_3)$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$에 수직,

즉 $\vec{a}$와 반대 방향이고 크기는 다시 r배 더 작아지므로

$\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = -r^2\,\vec{a}$이다. 따라서 점 A_4의 좌표 $(x_4,\, y_4)$는

$$\begin{aligned}(x_4,\, y_4) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}_4} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} + \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = (x_2 + r(y_2 - 1),\, y_2 - rx_2) - r^2(x_2,\, y_2 - 1) \\ &= (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2,\; y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1)).\end{aligned}$$

같은 방법으로 $\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5} = -r^3\,\vec{b}$이 되고, 점 A_5의 좌표 (x_5, y_5)는

$(x_5, y_5) = \overrightarrow{\mathrm{OA}_5} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_4} + \overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5} = (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2,\ y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1)) - r^3(y_2 - 1,\ -x_2)$
$\quad = (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2 - r^3(y_2 - 1),\ y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1) + r^3 x_2).$

---[5점]

$\overrightarrow{\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}} = (-1)^{n-1} r^{2n-2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}} = (-1)^{n+1} r^{2n-1}\vec{b}$ 임을 써서 위의 과정을 반복하면, 점 A_n의 좌표 (x_n, y_n)은 $n\to\infty$의 극한에서 등비급수가 포함된 식으로 나타내어지며 그 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_2(1 - r^2 + r^4 - \cdots) + (y_2 - 1)r(1 - r^2 + r^4 - \cdots) = \frac{x_2 + (y_2 - 1)r}{1 + r^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 + (y_2 - 1)(1 - r^2 + r^4 - \cdots) - x_2 r(1 - r^2 + r^4 - \cdots) = \frac{r^2 - x_2 r + y_2}{1 + r^2}$$

---[10점]

(별해)

점 A_1, A_2의 좌표가 각각 $(0,1)$, (x_2, y_2)이다. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 길이를 a라 놓자.

($a = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2 - 1)^2}$)

점 A_2에서, 점 A_1을 지나 x축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_2라 하면, 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{H}_2$는 세 변의 길이가 a, $|x_2|$, $|y_2 - 1|$인 직각삼각형이다. 제시문 〈가〉에서 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = ar$ 이다. 점 A_3에서, 점 A_2를 지나 y축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_3라 하면, 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{H}_3$은 세 변의 길이가 ar, $|y_2 - y_3|$, $|x_3 - x_2|$인 직각삼각형이고 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{H}_2$과 닮은꼴이다. 닮은꼴 삼각형 사이의 비례식을 써서 좌표들 사이의 관계식을 구하면 $y_2 - y_3 = ar \cdot \frac{x_2}{a}$, $x_3 - x_2 = ar \cdot \frac{y_2 - 1}{a}$ 이므로

점 A_3의 좌표는 $(x_3, y_3) = (x_2 + r(y_2 - 1),\ y_2 - rx_2)$이 된다.

마찬가지 방법으로 점 A_4의 좌표를 구하면, $x_3 - x_4 = ar^2 \cdot \frac{x_2}{a}$, $y_3 - y_4 = ar^2 \cdot \frac{y_2 - 1}{a}$ 에서

$(x_4, y_4) = (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2,\ y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1))$.

점 A_5의 좌표는 $x_4 - x_5 = ar^3 \cdot \frac{y_2 - 1}{a}$, $y_5 - y_4 = ar^3 \cdot \frac{x_2}{a}$ 에서

$(x_5, y_5) = (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2 - r^3(y_2 - 1),\ y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1) + r^3 x_2)$.

---[5점]

이 과정을 반복하면, 점 A_n의 좌표 (x_n, y_n)은 $n\to\infty$의 극한에서 등비급수가 포함된 식으로 나타내어지며 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_2(1 - r^2 + r^4 - \cdots) + (y_2 - 1)r(1 - r^2 + r^4 - \cdots) = \frac{x_2 + (y_2 - 1)r}{1 + r^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 + (y_2 - 1)(1 - r^2 + r^4 - \cdots) - x_2 r(1 - r^2 + r^4 - \cdots) = \frac{r^2 - x_2 r + y_2}{1 + r^2}$$

---[10점]

3-2.

[풀이]

선분 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}$가 y축과 평행하려면 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$가 y축에 수직인 경우에 해당한다.

($a = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = |x_2|$)

선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi a \cdot ar = 2\pi a^2 r$

선분 $\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi(a - ar^2) \cdot ar^3 = 2\pi a^2(r^3 - r^5)$

선분 $\mathrm{A}_6\mathrm{A}_7$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi(a - ar^2 + ar^4) \cdot ar^5 = 2\pi a^2(r^5 - r^7 + r^9)$

선분 $\mathrm{A}_8\mathrm{A}_9$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6) \cdot ar^7 = 2\pi a^2(r^7 - r^9 + r^{11} - r^{13})$$

선분 $\mathrm{A}_{10}\mathrm{A}_{11}$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6 + ar^8) \cdot ar^9 = 2\pi a^2(r^9 - r^{11} + r^{13} - r^{15} + r^{17})$$

선분 $\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{13}$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6 + ar^8 - ar^{10}) \cdot ar^{11} = 2\pi a^2(r^{11} - r^{13} + r^{15} - r^{17} + r^{19} - r^{21})$$

---[5점]

따라서 각 면적을 모두 더하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi a^2\{ \quad & r \\ & + r^3 - r^5 \\ & + r^5 - r^7 + r^9 \\ & + r^7 - r^9 + r^{11} - r^{13} \\ & + r^9 - r^{11} + r^{13} - r^{15} + r^{17} \\ & + r^{11} - r^{13} + r^{15} - r^{17} + r^{19} - r^{21} \\ & + \ldots\ldots \qquad \}\end{aligned}$$

이 식에서 세로 줄의 항들이 각각 등비급수를 이루는 것을 알 수 있다. 제시문 〈나〉를 써서 합을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 2\pi a^2\{r(1 + r^2 + r^4 + \cdots) - r^5(1 + r^2 + r^4 + \cdots) + r^9(1 + r^2 + r^4 + \cdots) - r^{13}(1 + r^2 + r^4 + \cdots) + \cdots\} \\ &= 2\pi a^2 r(1 + r^2 + r^4 + \cdots)(1 - r^4 + r^8 - \cdots) \\ &= \frac{2\pi a^2 r}{(1 + r^4)(1 - r^2)}\end{aligned}$$

---[15점]

$r = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$은 이차방정식 $r^2 + r - 1 = 0$의 해이다.

$r^2 = 1 - r$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi a^2 \frac{r}{3(1 - r) \cdot r} = \frac{2\pi a^2}{3} \frac{1}{1 - r} = \frac{2\pi (x_2)^2}{3} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

---[20점]

[수리논술 오후 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉~〈마〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 원소가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 원소의 개수 $n(S)$, 사건 A의 원소의 개수 $n(A)$에 대하여 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는 아래와 같다.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

〈나〉 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C와 같이 나타낸다. 사건 A의 확률과 여사건 A^C의 확률 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C) = 1$$

〈다〉 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는 아래와 같다.

$$\mathrm{P}(X = x) = {}_{n}\mathrm{C}_{x}\, p^{x} (1-p)^{n-x}$$

이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n, p)$와 같이 나타낸다.

〈라〉 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, 확률변수 X의 평균과 분산은 아래와 같다.

$$\mathrm{E}(X) = np$$

$$\mathrm{V}(X) = np(1-p)$$

〈마〉 상자에 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다.

1-1. 제시문 〈마〉의 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인하고 다시 상자에 넣는다. 이와 같은 시행을 4번 반복하여 나온 네 수의 합이 짝수일 확률은 $\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) **[10점]**

1-2. 제시문 〈마〉의 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 뽑아서 세 자리 자연수를 만들었을 때, 이 자연수가 3의 배수가 될 확률은 $\frac{p}{q}$이고, 4의 배수가 될 확률은 $\frac{u}{v}$이다. $p+q+u+v$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, u와 v도 서로소인 자연수이다.) **[15점]**

1-3. 제시문 〈마〉의 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 뽑아 숫자를 확인하고 다시 넣는 시행을 100회 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3이상인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(aX)=7$일 때, a의 값을 구하시오. (단, $a>0$) **[15점]**

1. 출제 의도

(1) 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지, (2) 경우의 수와 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지, 그리고 (3) 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾기 위해 제시문을 잘 활용하는지와 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

2. 문항 해설

'확률과 통계'에서 가장 기본이 되는 경우의 수와 순열, 조합 등의 기본개념을 이용하여 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 통찰력을 보여줄 수 있다. 본 문항의 핵심적인 내용은 확률과 통계의 '순열과 조합', '확률', '확률분포' 단원에서 다루어진다.

따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고, 독립시행을 활용한 문제를 계산할 수 있는지, 경우의 수 및 순열, 확률을 이해하고 이를 활용한 문제를 해결할 수 있는지, 조합과 이항분포의 뜻과 특성을 이해하고 이를 활용한 문제를 계산할 수 있는지를 확인하고자 한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

1-1.

[풀이]

한 번의 시행에서 짝수가 적힌 공이 뽑힐 사건(A)의 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$이고, 홀수가 적힌 공이 뽑힐 사건($A^C$)의 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$이다. 이 때, 네 수의 합이 짝수일 확률은 다음과 같다.

(i) 네 수가 모두 짝수인 경우

$${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{16}{625}$$

(ii) 네 수 중 두 수만 짝인 경우

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$$

(iii) 네 수가 모두 홀수인 경우

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$$

(i),(ii),(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{16}{625}+\frac{216}{625}+\frac{81}{625}=\frac{313}{625}$$

즉, $p=313, q=625$이므로 $p+q=313+625=938$.

--[10점]

(별해)

여사건(A^C)을 이용하여, 네 수의 합이 홀수일 확률은 다음과 같다.

(i) 네 수 중 하나만 홀수인 경우

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$$

(ii) 네 수 중 세 수만 홀수인 경우

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$$

(i),(ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{96}{625}+\frac{216}{625}=\frac{312}{625}$$

따라서, 네 수의 합이 짝수일 확률은 다음과 같다.

$$1-\frac{312}{625}=\frac{313}{625}$$

그러므로, $p=313, q=625$이므로 $p+q=313+625=938$.

--[10점]

1-2.

[풀이]

1부터 5까지의 자연수로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 다음과 같다.

$${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$$

3의 배수가 되도록 세 개의 공을 뽑는 경우는 $(1,2,3)$, $(1,3,5)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ 네 가지이고, 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3!=3\times2\times1=6$이다. 따라서 3의 배수가 될 확률은 다음과 같다.

$$\frac{6\times4}{60}=\frac{2}{5}$$

즉, $p=2, q=5$이다.

각 자리의 숫자의 합이 4의 배수가 되도록 세 개의 공을 뽑는 경우는 끝에 두 자릿수가 12, 24, 32, 52이 되어야 한다. 따라서 세 자리 자연수가 4의 배수가 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $(3,1,2)$, $(4,1,2)$, $(5,1,2)$

(ii) $(1,2,4)$, $(3,2,4)$, $(5,2,4)$

(iii) $(1,3,2)$, $(4,3,2)$, $(5,3,2)$

(iv) $(1,5,2)$, $(3,5,2)$, $(4,5,2)$

따라서 4의 배수가 될 확률은 다음과 같다.

$$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

즉, $u=1, v=5$이다.
그러므로, $p+q+u+v=2+5+1+5=13$.
--[15점]

1-3.
[풀이]
5개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 뽑는 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

뽑힌 두 수를 $a,b\,(a<b)$라 할 때, a,b의 순서쌍을 (a,b)로 나타내면 두 수의 차가 3이상인 경우는 $(1,4),\,(1,5),\,(2,5)$의 3가지이다. 따라서, 꺼낸 공에 적혀있는 두 수의 차가 3이상일 확률은 $\frac{3}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\frac{3}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(aX)=7$에서
$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=21$
$\mathrm{V}(aX)=a^2\mathrm{V}(X)=a^2\times 21=7$에서
$a^2=\frac{1}{3}$
$a>0$ 이므로 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
--[15점]

[수리논술 오후 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

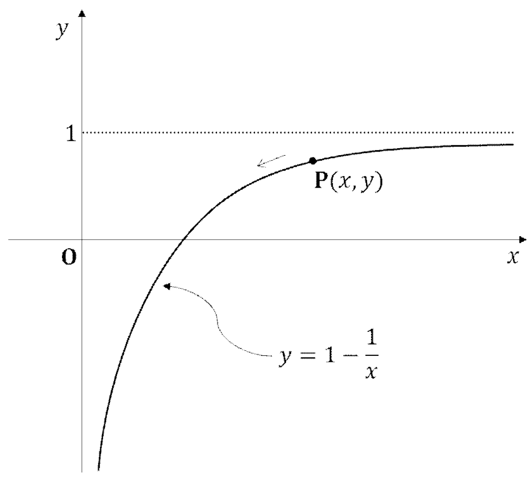
〈가〉 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

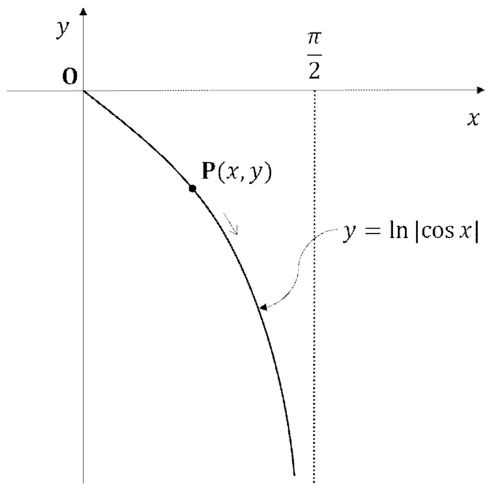
일 때, 점 P의 속력은 다음과 같다.

$$v(t) = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

〈나〉



〈그림 1〉



〈그림 2〉

2-1. 점 P가 〈그림 1〉의 $y = 1 - \dfrac{1}{x}$의 경로를 따라 움직이고, $x = f(t) = ae^{-t} \ (a > 1)$이라 하자. 속력 v의 최솟값과 이때 점 P의 좌표를 구하시오. **[10점]**

2-2. 점 P가 〈그림 2〉의 $y = \ln|\cos x|$의 경로를 따라 움직이고, $x = \dfrac{\pi}{2}(1 - e^{-t})$라 하자. 극한값 $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$를 구하시오. **[15점]**

1. 출제 의도

본 문제는 평면 위에서 주어진 경로를 따라 움직이는 점의 속력 표현을 이용해 속력의 최솟값과 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3-1. 평면 위의 주어진 경로를 따라 움직이는 점의 속력의 최솟값과 좌표를 지수함수의 미분법을 활용해 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3-2. 평면 위의 주어진 경로를 따라 움직이는 점의 속력의 극한값을 지수, 로그함수의 미분법과 삼각함수의 극한을 구하는 방법을 이용해 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

평면 위의 한 점의 운동에 대한 이해는 수학의 실생활에서의 유용성을 보여주는 좋은 예 중의 하나이다. 본 문제는, 좌표평면 위에서 점이 움직이는 경로를 주고, 지수함수, 로그함수 및 삼각함수의 미분법과 삼각함수의 극한을 구하는 방법을 활용해 속력을 구할 수 있는지 확인하는 문제이다. 교과과정에서는 미적분 Ⅱ의 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', 기하와 벡터의 '평면운동'에 해당한다. 아울러 제시문을 잘 활용하는지, 풀이과정은 논리적인지를 확인하고자 한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

2-1.

[풀이]

$\frac{dx}{dt}=-ae^{-t}$, 그리고 $y=1-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{a}e^{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{a}e^{t}$.

--[5점]

제시문 〈가〉로부터

$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(ae^{-t})^2+(1/ae^{-t})^2}$ 이므로 속력 v는 $ae^{-t}=1$, 즉 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

그러므로 점 P가 (1,0)의 위치일 때 속력이 최소가 되며 이때 $v=\sqrt{2}$이다.

--[10점]

(별해)

$x=ae^{-t}$의 역함수는 $t=h(x)=\ln\frac{a}{x}$이다.

제시문 〈나〉로부터 $\frac{dx}{dt}=-ae^{-t}=-x=\frac{1}{(\ln\frac{a}{x})'}$

--[5점]

제시문 〈가〉의 식을 쓰면

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{1}{|h'(x)|}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$=|x|\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

$x^2+\frac{1}{x^2}$은 $x=1$에서 최솟값을 갖으며 속력은 $v=\sqrt{2}$이다. 이때 점 P의 좌표는 (1,0)이다.

--[10점]

2-2.

[풀이]

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}e^{-t}=\frac{\pi}{2}-x.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left|\frac{-\sin x}{\cos x}\right|=-|\tan x|$$

--[5점]

$$v=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sqrt{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

--[10점]

$t\to\infty$ 에 $x\to\frac{\pi}{2}-$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{2}-x$ 라 놓으면

$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta}{\sin\theta}=1.$$

--[15점]

(별해)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}e^{-t}$$

$y=\ln|\cos x|=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-e^{-t})\right)\right|$ 에서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-\sin(\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}))}{\cos(\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}))}\frac{\pi}{2}e^{-t}$$

--[5점]

$$v=\frac{\pi}{2}e^{-t}\sqrt{1+\tan^2(\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}))}=\frac{\frac{\pi}{2}e^{-t}}{\cos(\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}))}=\frac{\frac{\pi}{2}e^{-t}}{\sin(\frac{\pi}{2}e^{-t})}.$$

--[10점]

$\theta=\frac{\pi}{2}e^{-t}$ 라 놓으면 $v=\frac{\theta}{\sin\theta}$ 이 된다.

$t\to\infty$ 일 때, $\theta\to 0+$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta}{\sin\theta}=1.$$

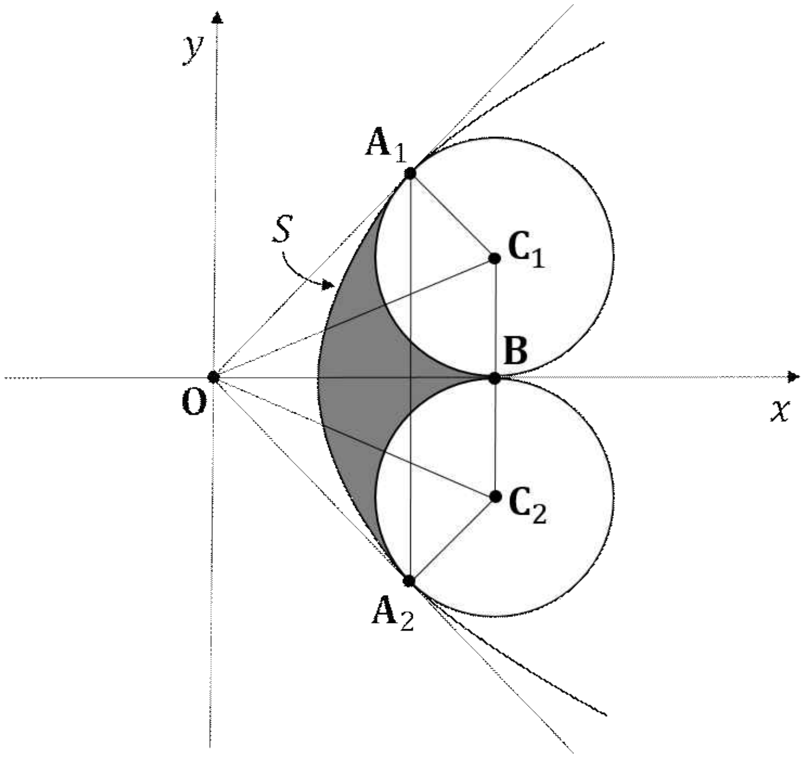
--[15점]

[수리논술 오후 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 좌표평면의 원점 O로부터 포물선 $y^2=2\sqrt{3}x-1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A_1과 A_2라 하자.

〈나〉 포물선 $y^2=2\sqrt{3}x-1$의 안쪽에 있으며 x축과 점 B에서 접하고 접점 A_1과 A_2에서 포물선에 접하는 두 원의 중심을 각각 C_1과 C_2라 하자.



3-1. 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$와 삼각형 $\mathrm{OC_1C_2}$의 넓이를 각각 구하시오. [15점]

3-2. 제시문 〈나〉의 그림에서 색칠되어 있는 부분 S의 넓이를 구하시오. [20점]

1. 출제 의도

본 문제는 미적분을 이용하여 접선의 방정식과 넓이를 구하는 문제이다. 포물선과 원의 접점을 구하고, 원의 성질과 접선의 방정식을 이용하여 질문에 답할 수 있는 지를 평가한다. 또한 대칭성을 이용한 넓이의 계산을 평가한다.

3-1. 접선의 방정식과 직선의 방정식의 활용을 평가하는 문제이다.

3-2. 적분과 3-1의 넓이등 도형을 해석하는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

주어진 그래프에 접하는 접선의 방정식의 응용으로써 그래프의 대칭성과 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

포물선 $y^2 = 2\sqrt{3}x - 1$ 위의 점을 $\left(a, \pm\sqrt{2\sqrt{3}a-1}\right)$ 이라하자. 그러면

$$2yy' = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{y}$$

이므로 $x = a$에서 $y' = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}a-1}}$ 이고 접선의 방정식은

$$y \pm \sqrt{2\sqrt{3}a-1} = \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}a-1}}(x-a)$$

--[4점]

이다. 이 접선이 원점을 지나므로 $(0,0)$을 대입하면

$$\pm\sqrt{2\sqrt{3}a-1} = \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}a-1}}(-a)$$

이다. 따라서

$$2\sqrt{3}a - 1 = \sqrt{3}a \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 두 접점은 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1\right)$ 이고 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

--[7점]

선분 $\mathrm{OA_1}$의 길이가 $\sqrt{\dfrac{1}{3}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이고 양의 기울기를 가지는 접선과 x 축이 이루는 각을 θ라고 하면 $\tan\theta = \sqrt{3}$ 이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 이다. 그러므로 중심이 $\mathrm{C_1}$인 원의 반지름 r은

$$r = \overline{\mathrm{OA_1}}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 $\mathrm{OA_1C_1}$ 의 넓이는 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 이고, 삼각형 $\mathrm{OC_1C_2}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OA_1C_1}$의 넓이의 2배이므로 삼각형 $\mathrm{OC_1C_2}$의 넓이는 $\dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 이다.

--[15점]

3-2.

[풀이]

사각형 $\mathrm{OBC_1A_1}$의 넓이를 S_1, 부채꼴 $\mathrm{C_1A_1B}$의 넓이를 S_2이라 하자. 사각형 $\mathrm{OBC_1A_1}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OC_1C_2}$의 넓이와 같으므로 $S_1 = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$이다. 따라서

$$\text{도형 } S\text{의 넓이} = 2\left\{S_1 - S_2 - \left[\int_0^1 \left\{\frac{y^2+1}{2\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}}\right\} dy\right]\right\}$$

---[12점]

$$= 2\left\{\frac{4}{3\sqrt{3}} - S_2 - \left[\int_0^1 \left\{\frac{y^2+1}{2\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}}\right\} dy\right]\right\}$$

$$= 2\left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{27}\right)$$

---[20점]

(별해)

포물선과 x축, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3, 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$의 넓이를 S_4 이라 하자. 그러면 $S_4 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$S_3 = S_4 - \int_0^1 \frac{y^2+1}{2\sqrt{3}} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{3}y^3 + y\right]_0^1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

또는

$$S_3 = \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{2\sqrt{3}x - 1}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2\sqrt{3}x - 1)^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3}(2\sqrt{3}x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

---[12점]

사각형 $\mathrm{A_1A_2C_2C_1}$의 넓이를 S_5라 하면 $S_5 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6\sqrt{3}}$.

따라서 도형 S의 넓이는

$$2(S_3 + S_5 - S_2) = 2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{5}{6\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{27}\right) = 2\left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{27}\right).$$

---[20점]