계 열 문 항

<가>

자연수 n의 양의 약수의 총합이 $2n$이 될 때, n을 완전수라 부른다. 예를 들어 6은 양의 약수가 1, 2, 3, 6이므로 이를 모두 더한 값이 6의 2배가 되어 완전수이다. 또 다른 예로 28은 양의 약수가 1, 2, 4, 7, 14, 28이므로 이를 모두 더하면 28의 2배가 되어 완전수이다. 이보다 더 큰 완전수로는 496, 8128 등이 있으며 완전수가 유한한 지 아니면 무한히 많은 지는 알려져 있지 않다.

자연수 n을 소인수분해 하였을 때, $n=pq$ (단, p, q는 $p<q$인 소수)인 경우 n이 완전수가 되는지 알아보자. $n=pq$의 양의 약수는 1, p, q, pq이므로 약수들의 합은 $1+p+q+pq$이다. 따라서 n이 완전수가 되기 위하여 $1+p+q+pq=2pq$가 되어야 한다. 즉, $pq-p-q-1=0$이다. 이를 풀면 $p=2$, $q=3$이 되어야 함을 확인할 수 있다. 그러므로 두 소수의 곱인 완전수는 6이 유일함을 알 수 있다.

이제 자연수 n이 $n=4m$ (m은 홀수)일 때 n이 완전수가 될 조건을 구해보자. m이 홀수이므로 n의 양의 약수는 m의 양의 약수를 1배, 2배, 4배한 수이다. m의 양의 약수의 총합을 $f(m)$이라 하면 n의 양의 약수의 총합은 $(1+2+4)f(m)=7f(m)$이다. 그러므로 n이 완전수라면 $7f(m)=8m$을 만족시킨다. 이때 7은 소수이므로 m은 7의 배수이다. $m=7k$(k는 자연수)로 두면 $f(m)=8k$이다. 만약 $k \ge 2$이면, 1, k, $7k$가 모두 서로 다른 m의 양의 약수이므로 $f(m) \ge 1+k+7k=8k+1$이 되어 모순이다. 만약 $k=1$이라면 $n=28$이고 이는 완전수이다. 따라서 $n=4m$인 완전수는 28뿐임을 알 수 있다.

<나>

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또, $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면 이 구간에 속하는 두 실수 x_1, x_2 ($x_1<x_2$)에 대하여 닫힌구간 $[x_1,x_2]$에서 연속이고 열린구간 (x_1,x_2)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (x_1,x_2)에 적어도 하나 존재한다.

이제 아래의 세 가지 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 생각해 보자.

(1) $f(x)$는 구간 $[0,\infty)$에서 연속이다.
(2) $x>0$일 때 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(x)<1$이다.
(3) $f(0)=0$이다.

이때 $x>0$이면 $f(x)<x$임을 평균값 정리를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다. 함수 $f(x)$가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0,x]$에서 연속이고 열린구간 $(0,x)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(y)$가 되는 y가 열린구간 $(0,x)$에 존재한다. 이 식을 정리하면 $f(x)-f(0)=xf'(y)$이다. 여기서 $y>0$이므로 조건 (2)에 의하여 $f'(y)<1$이다. 조건 (3)에서 $f(0)=0$이므로 $f(x)=xf'(y)<x$이다. 그러므로 $f(x)<x$이다.

<다>

급수

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^8}\right)+\ \cdots\ +\ln\left(1+\frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right)+\ \cdots$$

가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 찾아보자. 우선 로그의 진수는 양수이므로

$$1-\frac{1}{x}>0 \text{이고 } 1+\frac{1}{x}>0$$

이다. 따라서 $|x|>1$은 주어진 급수가 수렴하기 위한 필요조건임을 알 수 있다. 또한 로그의 성질을 사용하여 이 급수의 제n항까지의 부분합 $S_n(n\geq 2)$을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right) \end{aligned}$$

또한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2^{n-1}}}=\begin{cases}0 & (|x|>1)\\ 1 & (|x|=1)\\ \infty & (|x|<1)\end{cases}$ 이므로 $|x|>1$일 때 S_n이 수렴한다. 그러므로 주어진 급수가 수렴하기 위한 x의 범위는 $|x|>1$이다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 자연수 n이 $n=p^k$이면 n이 완전수가 아님을 보이시오. (단, p는 소수이고 k는 자연수이다.)

1-1(b). 자연수 n이 $n=8m$ (m은 홀수)이면 n이 완전수가 아님을 보이시오.

1-2. 제시문 <나>를 읽고 함수 $f(x)$가 아래의 네 가지 조건을 만족시킬 때 다음 문제에 답하시오.

(1) $f(x)$는 구간 $[0,\infty)$에서 연속이다. (2) $x>0$일 때 $f(x)$가 미분가능하다. (3) $f(0)=0$이다. (4) $f'(x)$는 구간 $[0,\infty)$에서 증가한다.

1-2(a). $f'(x)=f(1)$이 되는 x가 존재함을 보이시오.

1-2(b). $x>0$일 때 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$라고 하면 $g(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 증가함을 보이시오.

1-3. 제시문 <다>를 읽고 급수

$$\ln(1+x)+\ln(1+x^2)+\ln(1+x^4)+\cdots+\ln(1+x^{2^{n-1}})+\cdots$$

에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 위 급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

1-3(b). 위 급수의 합을 $f(x)$라고 할 때 1-3(a)에서 구한 x의 범위에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리시오.