계 열 문 항

<가>

$n \ge k$인 자연수 n과 k에 대하여 유리수 $\alpha(n,k)$를

$$\alpha(n,k) = \frac{1}{k}\,{}_{2n-k}\mathrm{C}_{k-1}$$

이라고 정의하자. 이때

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

은 서로 다른 n개에서 $r(0 \le r \le n)$개를 택하는 조합의 수이다. 단, $0! = 1$로 정의한다. 그러면 항등식

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

을 이용하여 $n \ge 4$일 때 명제

① ‘$\alpha(n,4)$는 자연수이다.’

가 참임을 증명할 수 있다. 또한, $n \ge 3$일 때 명제 ‘$3 \cdot \alpha(n, n-1)$이 자연수이다.’가 참임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}\alpha(n,n-1) &= \frac{1}{n-1}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} = \frac{1}{n-1}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_3 \\ &= \frac{1}{n-1}\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2\cdot1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)n}{2\cdot1} \\ &= \frac{1}{3}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_2\end{aligned}$$

소수는 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 1보다 큰 자연수이다. 유리수 $\alpha(17,7)$은 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha(17,7) &= \frac{1}{7}\,{}_{27}\mathrm{C}_6 \\ &= \frac{27\cdot26\cdot\cdots\cdot22}{7!} \qquad \cdots\cdots (1)\end{aligned}$$

이다. 유리수 $\alpha(17,7)$이 자연수라고 가정하면, (1)의 우변의 분모인 $7!$이 소수 7의 배수이므로, 분자

$$27\cdot26\cdot\cdots\cdot22 \qquad \cdots\cdots (2)$$

는 소수 7의 배수이다. 그런데 (2)는 소수 7의 배수가 아님을 증명할 수 있다. 따라서 모순이다. 그러므로 $\alpha(17,7)$은 자연수가 아니다.

제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 명제 ①이 참임을 증명하시오.

1-2. $n \ge 4$일 때 $5 \cdot \alpha(n, n-2)$와 $\alpha(100, 67)$이 자연수인지 아닌지를 각각 판별하고, 그 이유를 설명하시오. (단, 67은 소수이다.)

계 열 문 항

〈나〉

좌표평면에서 시간에 따라 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 주어질 때, 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(f'(t), g'(t))$이고, 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$$

이다.

어떤 축구 선수가 내리막길 앞에서 공을 높이 찼을 때 공의 위치를 좌표평면에 나타내 보자. 원점 O에서 제1사분면 방향으로 공을 찼을 때 공을 찬 방향과 x축이 이루는 예각을 θ라 하자. 그리고 내리막길은 제4사분면에 어떤 연속함수의 그래프로 주어진다고 하자. 시각 $t(t \ge 0)$에서의 공의 위치를 $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$라 하면

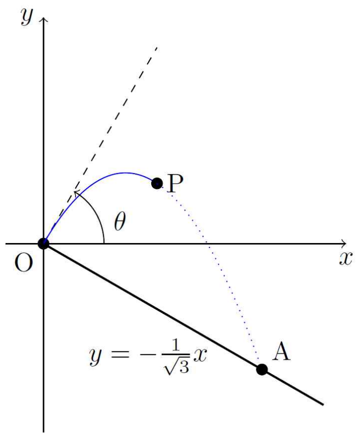
$$\begin{cases} x = 10t\cos\theta \\ y = 10t\sin\theta - 5t^2 \end{cases}$$

인 관계가 성립한다고 한다.

<그림 1>에서의 내리막길은 일차함수 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x\ (x \ge 0)$의 그래프를 나타낸다. 원점 O에서 찬 공이 내리막길에 처음 닿은 지점을 점 A라 할 때, 점 A의 x좌표는

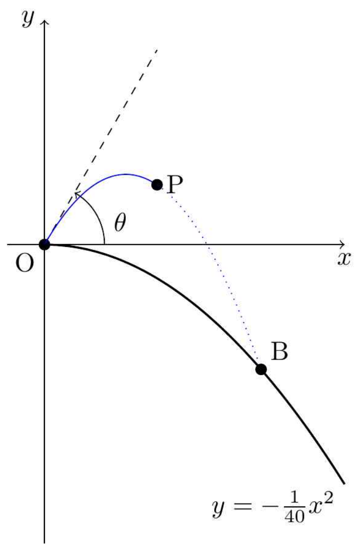
$$20\left(\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos^2\theta\right)$$

이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 가진다.



<그림 1>

<그림 2>에서의 내리막길은 이차함수 $y=-\frac{1}{40}x^2\ (x \ge 0)$의 그래프를 나타낸다. 원점 O에서 찬 공이 내리막길에 처음 닿은 지점을 점 B라 하자. 이때 $u=\tan\theta$로 놓으면, 점 B의 x좌표는 u의 함수로 나타낼 수 있고, 이를 이용하여 점 B의 x좌표가 최대가 되도록 하는 각 θ의 값을 구할 수 있다.



<그림 2>

제시문 〈나〉를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. <그림 2>에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 원점 O에서 찬 공의 속력이 최소일 때의 점 P의 y좌표를 구하시오.

2-2. <그림 2>에서 점 B의 x좌표가 최대가 되도록 하는 각 θ에 대하여 $\tan\theta$를 구하시오.

계 열 문 항

<다>

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

이다. 예를 들어, 정적분 $\int_0^1 x\,e^{x^2}dx$를 구해 보자. 이때 $x^2=t$로 놓으면 $2x\dfrac{dx}{dt}=1$이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 x\,e^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^t\,dt=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

이다.

또한, 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)\,g(x)\}'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

이므로 $f(x)\,g(x)$는 $f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$의 한 부정적분이다. 따라서

$$\int_a^b\{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)\}\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b$$

이므로

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

이다. 예를 들어, 정적분 $\int_0^1 x\,e^{-x}dx$를 구해 보자. 이때 $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 x\,e^{-x}dx=\Big[-x\,e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{2}{e}$$

이다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 정적분 $\int_0^1 e^{x^2}dx$의 값을 A라 할 때, 다음 정적분을 구하시오.

$$\int_0^1\left(x^2+1\right)e^{x^2}dx$$

3-2. $x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

㉠ $f(x)>0$

㉡ $5\int_1^x f(t)\,dt-\int_{2-x}^1\dfrac{x+t-2}{3-t}f(2-t)\,dt=5\,(x-1)$

이때 $f(63)$을 구하시오.