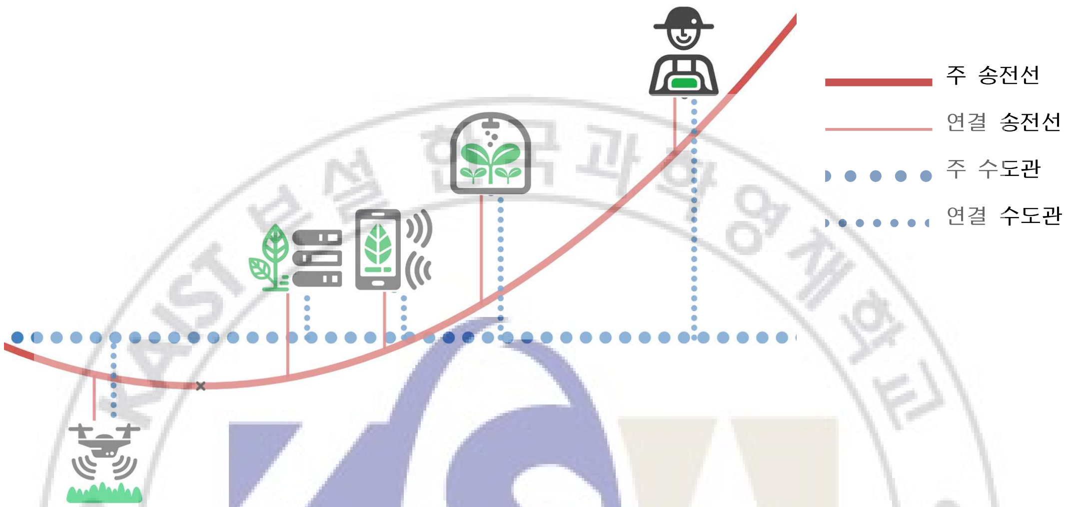
2024학년도 한국과학기술원 부설 한국과학영재학교 신입생선발 제2단계 창의적문제해결력검사 문제지

과목	수학	접수번호		성명		감독자	(인)

문제 1 2024년 인공지능 기반 미래형 농업도시로 지정된 한영시에 수도와 전력 공급망을 새로 건설하고자 한다. 한영시에는 5개의 스마트 농장이 있으며 각 농장의 위치는 좌표 평면 위에 다음과 같은 좌표로 나타낼 수 있다.

$$F_1(-1,0),\ F_2(1,1),\ F_3(2,1),\ F_4(3,2),\ F_5(5,3)$$

주 수도관과 주 송전선은 멀리 떨어져 있는 정수장과 발전소에서 시작하여 도시를 통과하는 각각 하나의 직선이나 곡선의 형태이며 건설 비용은 정부가 부담한다. 연결 수도관과 연결 송전선은 각 스마트 농장에서 주 수도관과 주 송전선까지 y축에 평행하게 연결하며 건설 비용은 한영시가 부담한다. 이때, 각 농장을 연결하는 연결 수도관의 비용은 길이에 비례하고, 연결 송전선의 비용은 길이의 제곱에 비례한다.



1-1 주 수도관을 x축에 평행한 직선 형태로 건설할 때, 한영시가 부담하는 비용이 최소가 되는 주 수도관을 직선의 방정식으로 나타내고 그 이유를 설명해 보자.

1-2 주 수도관을 원점을 지나는 직선의 형태로 건설할 때, 한영시가 부담하는 비용이 최소가 되는 주 수도관을 직선의 방정식으로 나타내고 그 이유를 설명해 보자.

1-3 주 송전선은 다음 세 가지 형태를 고려하고 있다.

① x축과 평행한 직선

② 원점을 지나는 직선

③ 원점이 꼭짓점인 이차함수의 그래프

이 중 한영시가 부담하는 비용이 최소가 되는 주 송전선의 직선 또는 곡선의 방정식을 구하고 그 이유를 설명해 보자.

1-4 1-3의 경우보다 더 적은 비용이 드는 주 송전선을 예측해 보고 그 이유를 설명해 보자.

문제 2 다음의 규칙을 만족하는 숫자들을 거북수라고 한다.

① 단위거북수라고 불리는 어떤 숫자 u가 있다.

② 모든 거북수는 $n+mu$(단, n, m은 정수)꼴로 표현된다.

③ $|n_1-n_2|$와 $|m_1-m_2|$가 각각 0 또는 3의 배수일 때 n_1+m_1u와 n_2+m_2u는 같은 거북수로 생각하고

$$n_1+m_1u=n_2+m_2u$$

로 나타낸다.

④ $u^2=2$

⑤ 정수 a_1, a_2, b_1, b_2에 대하여 두 거북수 $A=a_1+a_2u$와 $B=b_1+b_2u$의 합과 곱은 다음과 같다.

$$A+B = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)u$$
$$AB = (a_1b_1+2a_2b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)u$$

⑥ 그 외의 덧셈과 곱셈에 관한 규칙은 u를 문자로 생각하고 계산하는 일반적인 숫자 및 문자식끼리의 연산법칙을 따른다.

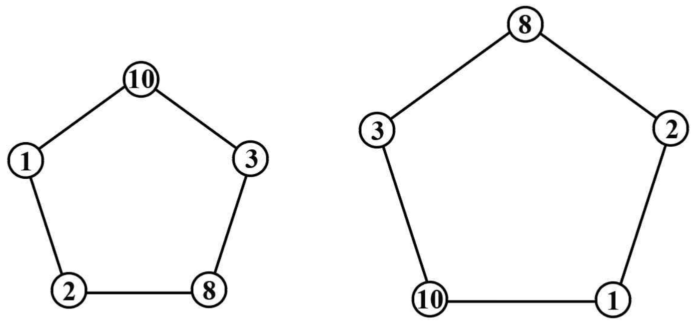
2-1 서로 다른 거북수는 몇 개인가? 이들을 모두 나열해 보자.

2-2 0이 아닌 거북수 T에 대해 T와 곱해서 1이 되는 수를 $R(T)$라고 쓴다.
0이 아닌 모든 거북수 T에 대해 $R(T)$를 구해 보자.

2-3 이차방정식 $x^2+x=1$을 만족하는 모든 거북수 x를 구해 보자.

2-4 a, b, c는 거북수이며 $a\neq 0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대한 거북수 해를 구하려고 한다. 이 방정식의 근의 공식을 유도하고, 어떤 경우에 이 방정식이 거북수 해를 가지는지 설명해 보자.

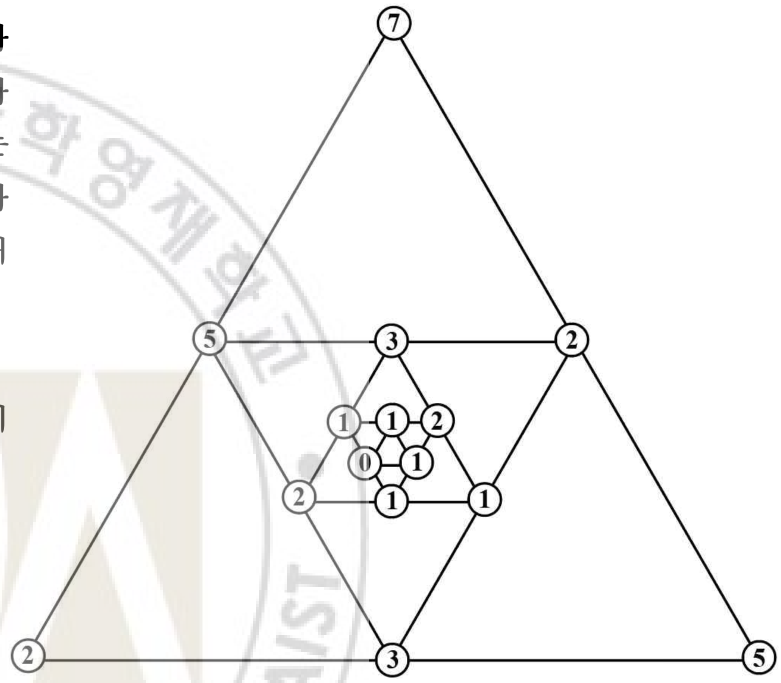
문제 3 이 문제에서 다루는 정n각형의 각 꼭짓점에는 음이 아닌 정수가 쓰여 있다. 이러한 정n각형 중 한 꼭짓점에서 반시계 방향으로 숫자들을 읽어서 얻어지는 숫자들의 배열이 같으면 두 정n각형은 크기에 상관없이 <u>같은 정n각형</u>으로 생각한다. 예를 들어 다음 두 정오각형은 같은 정오각형으로 생각한다.



꼭짓점에 음이 아닌 정수가 쓰인 정n각형으로부터 다음과 같이 새로운 정n각형들을 만드는 작업을 <u>D-수축</u>이라고 한다.

- 정n각형의 각 변의 중점에 변의 끝점에 쓰인 숫자의 차이를 쓰고 이를 연결하여 새로운 정n각형을 만든다.
- 이 과정을 계속하다가 바로 다음에 만들어질 정n각형이 현재의 정n각형과 같아지면 멈춘다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점에 순서대로 7, 2, 5가 쓰인 정삼각형에 D-수축을 수행하면 처음에는 5, 3, 2가 순서대로 쓰인 정삼각형을 얻게 된다. 그리고 4번째에는 꼭짓점에 1, 0, 1이 순서대로 쓰인 정삼각형을 얻게 되고 다음부터는 같은 정삼각형이 반복된다. 그러므로 7, 2, 5가 순서대로 쓰인 정삼각형은 4번째에서 D-수축이 멈추게 된다.



3-1 D-수축을 할 수 없는 정삼각형을 모두 찾아보자. 즉, D-수축에 의해서 숫자의 배열이 달라지지 않는 정삼각형을 모두 찾아보자.

3-2 꼭짓점에 0, 0, 0이 쓰인 정삼각형에서 D-수축이 멈추는 정삼각형을 모두 찾고 그 이유를 설명해 보자.

3-3 D-수축이 멈추지 않는 정삼각형이 존재하는지 알아보고 그 이유를 설명해 보자.

3-4 정사각형 S_0에 대해서 D-수축을 하여 n번째 단계에서 얻어지는 정사각형을 S_n이라고 하자. S_n에 쓰인 숫자를 a, b, c, d라고 할 때, 다음 숫자 중 가장 큰 값을 $|S_n|$이라고 하자.

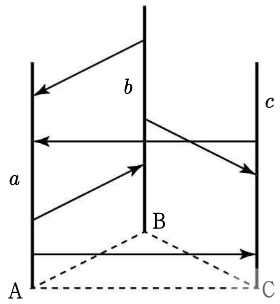
$$|a-b|,\ |a-c|,\ |a-d|,\ |b-c|,\ |b-d|,\ |c-d|$$

즉, $|S_n|$은 S_n에 쓰인 숫자 중 가장 큰 값에서 가장 작은 값을 뺀 값이다.
이때, $|S_n|$과 $|S_{n+1}|$의 대소를 비교하고 그 이유를 설명해 보자.

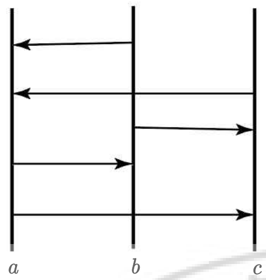
3-5 음이 아닌 정수가 쓰인 정사각형들은 D-수축에 의해서 어떻게 될지 추측하고 그 이유를 설명해 보자.

문제 4 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC를 밑면으로 하는 삼각기둥 모양의 사다리를 생각해 보자. 세 꼭짓점 A, B, C 위로 수직인 세 선분을 각각 a, b, c라고 하자. 세 선분 a, b, c 사이를 밑면과 평행하면서 서로 만나지 않도록 길이가 1인 화살을 붙여서 얻어진 것을 <u>삼각사다리</u>라고 한다. 이때 모든 화살들은 윗면과 밑면 사이에 있다.

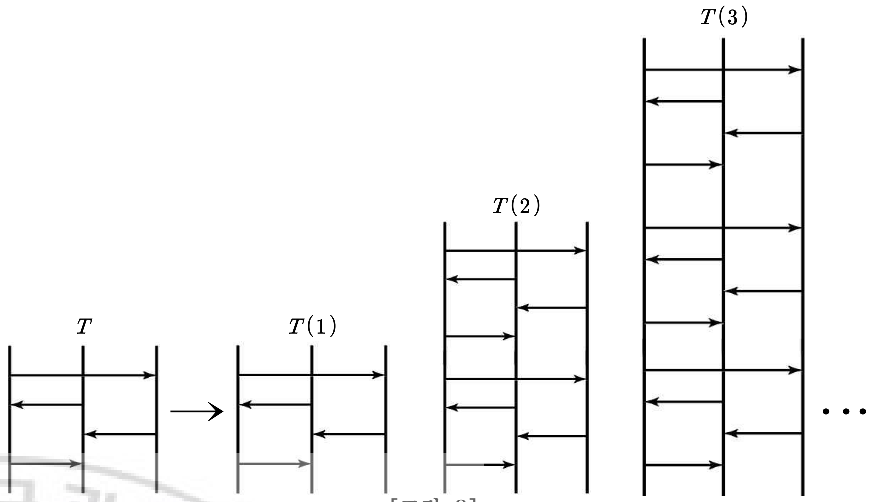
예를 들어 [그림 1]은 5개의 화살이 있는 삼각사다리이며 이를 정면에서 바라보면 [그림 2]처럼 보인다. 앞으로 삼각사다리는 [그림 2]와 같은 형태로 나타내며, 선분의 기호 a, b, c를 생략하기도 한다.



[그림 1]



[그림 2]



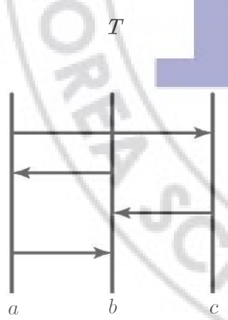
[그림 3]

또한, 자연수 n과 삼각사다리 T가 주어졌을 때, [그림 3]과 같이 n개의 T를 아래에서 위로 쌓아서 얻어진 삼각사다리를 $T(n)$이라 한다.

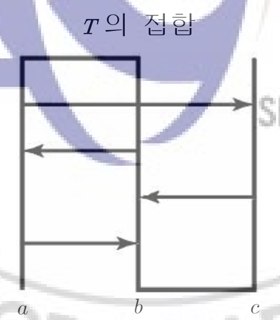
삼각사다리 T가 주어졌을 때, T의 선분 a의 위쪽 끝과 선분 b의 위쪽 끝을 선분으로 연결하고 선분 b의 아래 끝과 선분 c의 아래 끝을 선분으로 연결한 것을 <u>T의 접합</u>이라고 한다. T의 접합에 대해, 선분 a의 아래 끝에서 출발하여 선분 c의 위쪽 끝까지 이동하는 다음 경로를 <u>행로</u>라고 한다.

a의 아래 끝 → a의 위 끝 → b의 위 끝 → b의 아래 끝 → c의 아래 끝 → c의 위 끝

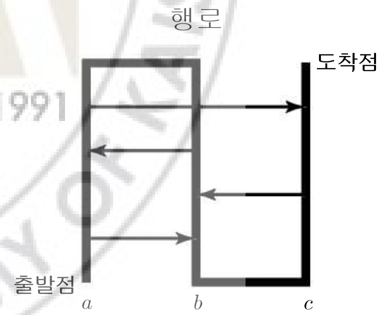
예를 들어 T가 [그림 4]와 같다고 할 때, [그림 5]는 T의 접합을 나타내고, [그림 6]의 굵게 표시된 부분은 행로를 나타낸다.



[그림 4]



[그림 5]

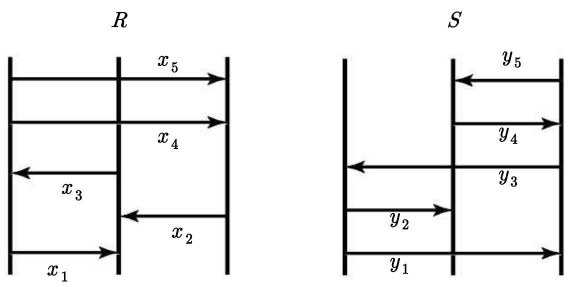


[그림 6]

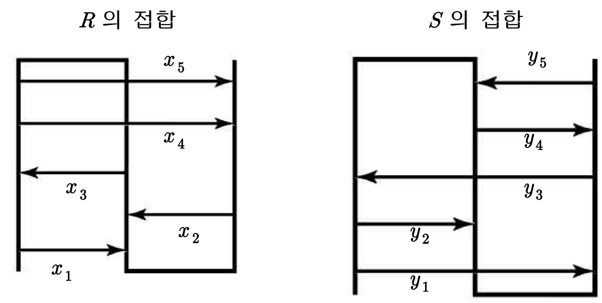
T의 서로 다른 두 화살 x, y의 순서쌍 (x,y)를 <u>화살쌍</u>이라고 한다. T의 접합에서 행로를 따라 이동할 때, 화살 x와 y의 시작점과 끝점을 다음의 순서로 지나가면 (x,y)를 <u>좋은 화살쌍</u>이라고 한다.

x의 시작점 → y의 끝점 → x의 끝점 → y의 시작점

이때, T의 좋은 화살쌍의 개수를 $f(T)$로 나타낸다. 예를 들어 [그림 7]의 두 삼각사다리 R과 S에 각각 화살 x_1, …, x_5와 y_1, …, y_5가 있다고 하자. [그림 8]의 R의 접합과 S의 접합을 살펴보면 R의 좋은 화살쌍은 (x_1,x_2) 밖에 없으며, S의 좋은 화살쌍은 (y_1,y_3), (y_1,y_5), (y_2,y_3), (y_2,y_5)가 있어서 $f(R)=1$, $f(S)=4$가 된다.



[그림 7]



[그림 8]

4-1 [그림 7]의 삼각사다리 R에 대해 $f(R(2))$와 $f(R(3))$을 각각 구해 보자.

4-2 두 식 $f(P)=2$, $f(P(2))=7$을 만족하는 삼각사다리 P가 있으면 하나를 찾고, 없다면 그 이유를 설명해 보자.

4-3 두 식 $f(Q(2))=20$, $f(Q(10))=700$을 만족하는 삼각사다리 Q가 있으면 하나를 찾고, 없다면 그 이유를 설명해 보자.

4-4 삼각사다리 T에 대해 $f(T(n))$이 가지는 여러 가지 성질을 찾아보고 설명해 보자.