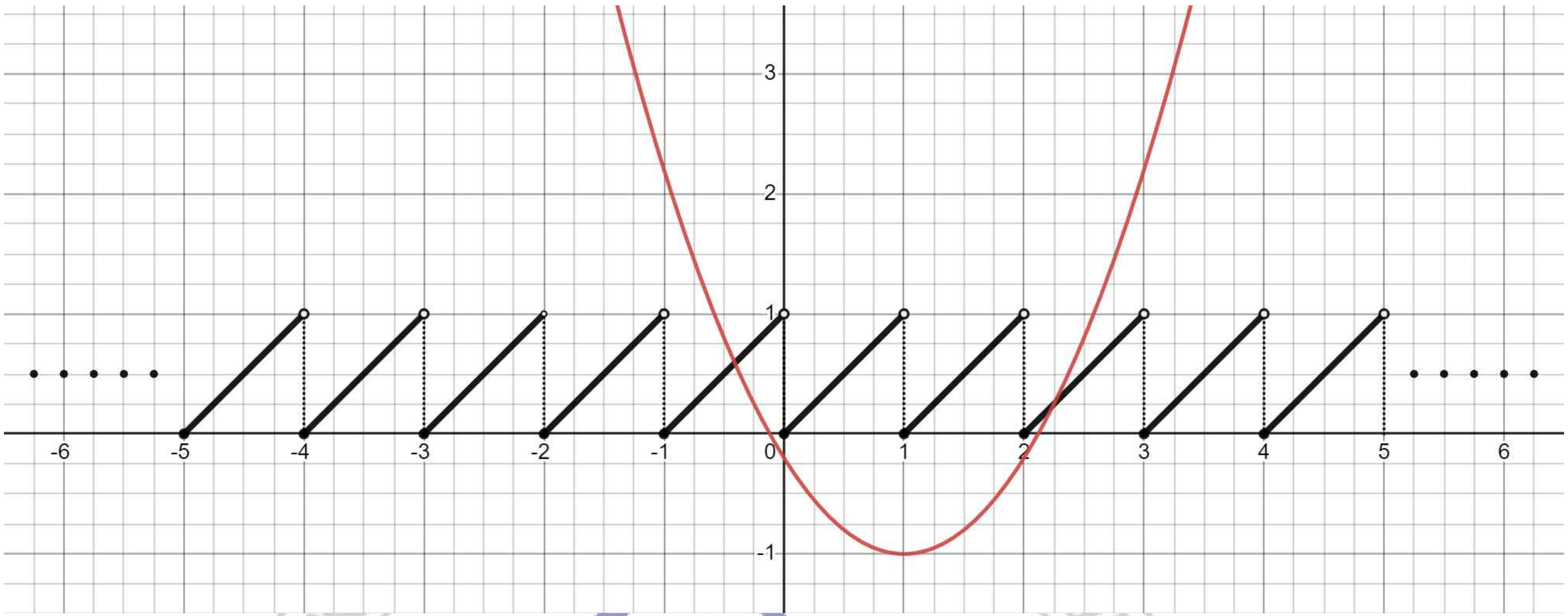
2023학년도 한국과학기술원 부설 한국과학영재학교 신입생선발 제2단계 창의적문제해결력검사 문제지

과목	수학	접수번호		성명		감독자	(인)

문제 1 대한이는 3D 프린터로 충분히 긴 줄톱을 출력하기 위해 우선 컴퓨터로 그래프를 그렸다. 그런데 민국이가 실수로 같은 파일에 이차함수를 입력하여 다음과 같이 두 가지의 그래프가 출력되었다. 이 때, 출력된 종이는 충분히 크다고 생각하자.



1-1 대한이가 톱니 모양의 그래프를 그리기 위해서 구간 $n \le x < n+1$(n은 정수)에서 입력한 함수 $y=f(x)$의 식을 구하여라.

1-2 대한이는 민국이가 입력한 이차함수의 그래프가 꼭짓점이 $(1,-1)$이고, y축과의 교점이 $\left(0,-\frac{1}{5}\right)$이라는 것을 알았다. 그러면 민국이가 입력한 이차함수 $y=g(x)$의 식은 무엇일까?

1-3 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 모두 구해 보자.

1-4 $m=1$, $m=2$, $m=3$일 때, 이차함수 $y=\frac{1}{10^m}(x^2-x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 각각 구해 보자.(단, 세로 점선들과의 교점은 세지 않는다.)

1-5 일반적으로 m이 짝수인 자연수일 때, 이차함수 $y=\frac{1}{10^m}(x^2-x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 m을 이용하여 나타내 보자.(단, 세로 점선들과의 교점은 세지 않는다.)

문제 2 KSA 수학연구회는 매 주 토요일 오후에 모여서 한 주 동안 자신이 공부한 내용을 발표하고 토론한다. 그 발표회에서 정미는 다음 내용을 친구들에게 발표하였다.

정미의 발표 내용
① A는 양의 실수이고, B와 C는 실수라고 하자. 모든 실수 t에 대하여 $At^2-2Bt+C \geq 0$이면 $B^2-AC \leq 0$이다. ② 모든 실수 x와 y에 대하여, $2x^2+5y^2-4xy \geq 0$이다.

정미의 발표를 듣고 동근이는 다음과 같은 사실을 알아내고 발표하였다.

동근이의 발표 내용
a, b, c, d가 실수일 때, 정미의 발표 ②에서 x에 $a-tc$를 대입하고 y에 $b-td$를 대입하면, $0 \leq 2(a-tc)^2+5(b-td)^2-4(a-tc)(b-td)$ $= (2c^2+5d^2-4cd)t^2-2(2ac+5bd-2bc-2ad)t+2a^2+5b^2-4ab$ 를 만족한다. 따라서 $2c^2+5d^2-4cd>0$일 경우에는, 정미의 발표 ①을 활용하여 부등식 $(2ac+5bd-2bc-2ad)^2 \leq (2a^2+5b^2-4ab)(2c^2+5d^2-4cd)$ 가 성립함을 알 수 있다.

또한 윤이는 다음과 같은 내용을 발표하였다.

윤이의 발표 내용
$x^2+y^2=9$를 만족하는 실수 x와 y에 대하여 다음 식 $2a-b=\sqrt{5}x$ $a+2b=\sqrt{5}y$ 를 만족하는 a와 b를 x와 y에 관한 식으로 표현하여 a^2+b^2의 값을 계산하였다. 그 결과 x와 y의 값에 상관없이 a^2+b^2이 유일한 실수 값을 가진다는 것을 알 수 있다.

2-1 <u>**정미의 발표 내용**</u> 중 ①, ②가 성립하는 이유를 설명해 보자.

2-2 <u>**윤이의 발표 내용**</u> 중 a와 b를 x와 y에 관한 식으로 표현해 보자. 그리고 윤이의 발표 내용이 성립하는 이유를 설명해 보자.

2-3 <u>**윤이의 발표 내용과 문제 2-2를 활용**</u>하여, $x^2+y^2=9$를 만족하는 실수 x와 y에 대하여 $2x^2+5y^2-4xy$가 가질 수 있는 값의 범위를 정확히 구하고,

$$X^2+Y^2=9,\quad 2X^2+5Y^2-4XY=34,\ X \geq 0,\ Y \leq 0$$

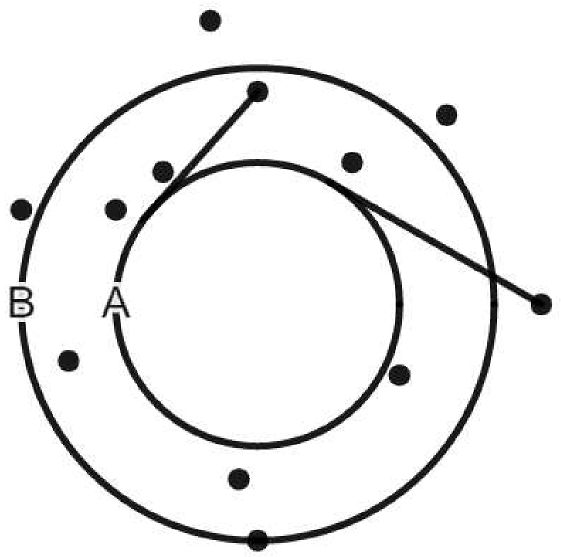
을 만족하는 실수 X와 Y를 구해 보자.

2-4 a, b, c, d, H, S가 실수이고 $2H>S^2$을 만족한다. <u>**동근이의 발표를 참고**</u>하여,

$$(2ac+Hbd+Sbc+Sad)^2 \leq (2a^2+Hb^2+2Sab)(2c^2+Hd^2+2Scd)$$

가 성립하는 이유를 설명해 보자.

문제 3 종이 위에 중심이 같고 반지름이 각각 3과 5인 원 A와 B가 있다. 원 A의 바깥에는 여러 개의 점이 찍혀 있고, 원 A의 위와 안에는 점이 없다. 한영이와 영주는 찍혀 있는 모든 점에서 원 A에 접선을 하나씩 긋고, 그 접점까지의 거리를 측정하여 그 값들의 평균과 분산을 따로 기록하였다. 어느 날, 한영이는 그림이 그려진 종이를 잃어버렸다. 한영이는 원 B 안쪽(경계 포함)에 찍힌 점의 개수가 135개이며, 원 B 바깥쪽(경계 미포함)에 최소한 한 개 이상의 점이 있다는 것 외에 다른 어떤 정보도 기억나지 않았다.



3-1 원 B 안쪽에 찍힌 점들과 바깥쪽에 찍힌 점들에 대한 측정값(접점까지의 거리)에는 어떤 차이점이 있는지 설명해 보자.

3-2 다행히 한영이는 평균이 2.5라는 기록을 발견하였다. 이 때 원 B 안쪽에 있는 점의 개수와 평균값 2.5만을 이용하여 원 B 바깥쪽에 있는 점의 개수가 224개 이하임을 설명해 보자.

3-3 다음 날 영주는 분산이 0.75임을 기억해 냈다. 지금까지 알아낸 원 B 안쪽에 있는 점의 개수와 평균값, 그리고 분산을 모두 종합하여 원 B 바깥쪽에 있는 점의 개수가 67개 이하임을 설명해 보자.

3-4 지금까지 알아낸 사실을 종합하여 다음을 만족하는 자연수 M을 찾고 그 이유를 설명해 보자.

$$(\text{가장 큰 측정값}) \leq M$$

(단, 가능하면 작은 값의 M을 찾아보자.)

문제 4 8개의 정수 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 하나씩 골라 좌표평면 위에 4개의 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)을 얻을 수 있다. 이 네 점의 모임을 **사분점군**이라고 하자. 여기서 점들의 순서는 상관 없다. 예를 들어, 사분점군

$$(2,0),\ (1,5),\ (3,6),\ (4,7) \text{과 } (4,7),\ (2,0),\ (3,6),\ (1,5)$$

는 같은 사분점군이다. 또한 0과 1, 1과 2, 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6, 6과 7, 7과 0을 **이웃수**라고 하자.

한 사분점군에서 서로 다른 두 점이 한 쌍의 이웃수를 공유할 때, 한 쌍의 이웃수를 서로 바꾸어 새로운 사분점군을 얻는 것을 **이웃수 교환**이라고 하자. 예를 들어, 사분점군 (2,0), (1,5), (3,6), (4,7)에 대하여 다음과 같이 네 번의 이웃수 교환을 통해 사분점군 (1,6), (2,4), (3,7), (5,0)을 얻을 수 있다.

$$(2,0),(1,5),(3,6),(4,7) \overset{4\leftrightarrow 5}{\Rightarrow} (2,0),(1,4),(3,6),(5,7) \overset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow} (1,0),(2,4),(3,6),(5,7)$$

$$\overset{7\leftrightarrow 0}{\Rightarrow} (1,7),(2,4),(3,6),(5,0) \overset{6\leftrightarrow 7}{\Rightarrow} (1,6),(2,4),(3,7),(5,0)$$

사분점군 F에 i회의 이웃수 교환을 통해 사분점군 G를 얻을 수 있을 때, 이러한 i 중 가장 작은 수를 F와 G의 **이웃수 차이**라고 하자. 예를 들어, 위에서 살펴본 사분점군 (2,0), (1,5), (3,6), (4,7)과 사분점군 (1,6), (2,4), (3,7), (5,0)의 이웃수 차이는 4 이하라는 사실을 알 수 있다.

사분점군 F, G, H가 다음과 같을 때, 아래 물음에 답하여라.

$$F:\ (0,5),(1,4),(2,6),(3,7)$$
$$G:\ (1,6),(0,4),(2,7),(3,5)$$
$$H:\ (0,4),(1,7),(2,6),(3,5)$$

4-1 F에 세 번의 이웃수 교환을 통해 G를 얻을 수 있음을 보여라.

4-2 F와 G의 이웃수 차이를 구해 보자.

4-3 F와 H의 이웃수 차이를 구해 보자.